

令和 6 年 4 月 3 日現在

機関番号：34316

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2020～2023

課題番号：20K03689

研究課題名（和文）動的境界条件を有する拡散方程式の非線形問題への展開

研究課題名（英文）Expansion of diffusion equations with a dynamic boundary condition to nonlinear problems

研究代表者

川上 竜樹（Kawakami, Tatsuki）

龍谷大学・先端理工学部・教授

研究者番号：20546147

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,400,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では、半空間における動的境界条件を有する拡散方程式の非線形問題への展開を目指し、関連する諸問題について考察を行った。まず動的境界条件を有する拡散方程式については、これまで有界な初期値に対してのみ得られてた可解性について、境界上の初期条件はゼロである場合に限定するものの、内部の初期条件が適当な重み付き空間に属する場合に、より広いクラスに属する解の可解性を得た。また、付随する問題として、分数冪 Hardy-Henon 方程式の可解性及びその構造、指数型非線形項を境界条件に有する熱方程式の可解性と漸近挙動、高階放物型方程式の可解性、分数冪拡散方程式の高次漸近展開理論の再構築に対する結果を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

動的境界条件を有する拡散方程式は近年、純粋数学のみならず応用数理や環境工学、生態学など様々な分野において活発に研究されてきている。現象の多くは非線形問題で記述されることから、その基礎となる線形問題における可解性や付随する楕円型・放物型方程式の考察は、非線形問題への応用上欠かすことのできないものであり、今回の研究成果は今後の非線形問題への展開に向けて大変示唆に富んだものであり、今後の進展が大きく期待される。

研究成果の概要（英文）：In this research, our aim is to expand of diffusion equations with a dynamical boundary condition in half-space to nonlinear problems, and we studied related issues. For diffusion equations with a dynamical boundary condition, although only when the initial data on the boundary is zero, we extended solvability of solutions, which was previously obtained only for bounded initial data, for a wider class of internal initial data belongs to an appropriate weighted space. Furthermore, we also obtained related results as the solvability and structure of fractional Hardy-Henon equations, the solvability and asymptotic behavior of the heat equation with an exponential nonlinear boundary condition, the solvability of higher-order parabolic equations, and refined asymptotic expansions for fractional diffusion equations.

研究分野：偏微分方程式

キーワード：動的境界条件 可解性 分数冪拡散方程式 非線形放物型方程式

## 様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

これまで多くの非線形拡散問題に関する研究が、境界上での値を固定したディリクレ境界条件や流入を固定したノイマン境界条件、さらにそれらを組み合わせたロバン境界条件などの固定された境界条件の下で考察されてきた。近年、境界上での反応を考慮した境界条件の一つとして動的境界条件の研究が盛んに行われてきたが、それらの多くは有界領域に制限されており、非有界領域への展開が待たれていた。これに対して、川上は Comenius 大学の Marek Fila 氏と東京大学の石毛和弘氏とともに非有界領域、特に半空間及び単位球の外部領域において、動的境界条件の研究を開始し、これまでに冪乗型の非線形項を有する半線形楕円型方程式について幾つかの興味深い結果を得ていた。一方、方程式が発展方程式、特に放物型方程式である場合については、界面運動に関連した退化放物型方程式に関する粘性解理論によるアプローチが得られているのみであり、具体的な解表示に基づいた可解性や漸近挙動の解析についてはその進展が期待されていた。また、関連する分数冪拡散方程式やその定常問題である楕円型方程式、さらに冪乗型以外の非線形項への展開など、非局所拡散や異常拡散を含む非線形現象の解構造の解明への足掛かりが期待できる状況であった。

### 2. 研究の目的

本研究は、半空間や単位球の外部領域などに代表される非有界領域において、動的境界条件を有する非線形拡散方程式の可解性や漸近挙動などの解明に向けた展開として、まずは線形問題に対して、内部の拡散極限の考察や基本解の構成を目指した可解性の解明を目的とした。また、これらに付随する研究として、分数冪拡散方程式と高階放物型方程式との関係性や定常問題の解構造、指数型非線形項への応用についても考察し、研究成果のみならず新たな方向性の創出も目指した。

### 3. 研究の方法

動的境界条件については、Fila 氏、石毛氏との一連の共同研究の継続研究にあたるものであるため、今回も共同研究にて実施した。ここでは動的境界条件付き半線形楕円型方程式に対する考察をもとに、半空間及び単位球の外部領域において、固定された境界条件を有する非斉次拡散方程式と非斉次動的境界条件を有するラプラス方程式に問題を分割することにより、それぞれの対応する積分方程式について、積分核の情報を用いることで可解性に必要な条件を抽出した。また、分数冪拡散方程式や高階放物型方程式については、これまで川上が石毛氏と共同で取り組んできた高次漸近展開理論をもとに、より詳細な解析を行なった。さらに、対応する定常問題の一つである分数冪 Hardy-Henon 方程式については、本問題の専門家である慶應義塾大学の生駒典久氏、早稲田大学の長谷川翔一氏を共同研究者とし、半空間への調和拡張理論とエレルギー評価を組み合わせることにより、詳細な解構造の解明に取り組んだ。

本研究期間のうち、2020 年度及び 2021 年度はコロナ禍のため、多くの研究集会、特に国外の研究集会についてはそのほとんどがキャンセル(一部オンライン開催)となってしまったため、最新の研究成果の情報収集のために各種セミナーや研究集会への参加することが難しい状況であったが、国内外の共同研究者とはオンラインツールを用いて密に連絡を取り合うことで研究を推進した。2022 年度以降については制限の緩和に合わせて、積極的に国内外の研究集会へ参加した。また、2020 年度から継続的に「楕円型・放物型微分方程式研究集会」を龍谷大学でそれぞれ開催・運営(2020 年度と 2021 年度はオンライン開催)し、積極的な研究交流を図るとともに、複数の国際研究集会を運営し、国際的な連携強化に努めた。

### 4. 研究成果

#### (1) 単位球の外部領域における動的境界条件付き熱方程式に関する研究

Fila 氏、石毛氏と Comenius 大学(当時)の Johannes Lankeit 氏との共同研究により、空間 3 次元以上の場合に時間大域解を構成するとともに、内部の方程式である熱方程式の拡散極限として、本問題の解が動的境界条件を有するラプラス方程式の会に収束することを示した。なお、本成果は川上の別の研究課題からの継続研究として得られた成果であり、双方の研究課題に成果として掲載している。

- (2) 分数冪 Hardy-Henon 方程式の可解性と解構造に関する研究  
生駒氏と長谷川氏との共同研究により、分数冪ラプラシアンを有する非線形楕円型方程式、特に非線形項に空間に対する重みを有した Hardy-Henon 方程式に対して、Joseph-Lundgren 指数を中心に、安定な特異定常解の存在、球対称解の層構造を証明した。合わせて、通常のラプラシアンの場合には現れない臨界指数の非一意性についても示した。
- (3) 微分項を含む一般の非線形項を有する分数冪・高階放物型方程式の可解性に関する研究  
石毛氏と東北大学の岡部真也氏との共同研究により、これまでの多くの典型例(冪乗型、移流型、微分の冪乗型等)を含む一般の非線形項を有する放物型方程式に対して、解の可解性に対する十分条件を与えた。特に高階放物型方程式に対して、分数冪拡散方程式の積分核を用いた新たな majorant kernel を導入することにより、通常の拡散方程式の場合と比較において最適と考えられる十分条件を与えることに成功した。
- (4) 指数型非線形項を境界条件に有する拡散方程式の可解性と漸近挙動に関する研究  
Milano 大学の Elide Terraneo 氏と Bergamo 大学の Giulia Furioli 氏との共同研究により、半空間において指数型非線形項を有する場合について、その非線形性から予想される適切な関数空間において、小さな初期値に対する時間大域解の構成を行なった。さらに初期値の仮定に応じて解の減衰評価を得るとともに、その漸近挙動が熱核の定数倍となることを示した。これまで動的境界条件については冪乗型の非線形項を中心に解析がなされているが、本成果により、境界上の指数型非線形性を取り扱う場合についての一定の示唆を得たといえる。
- (5) 分数冪拡散方程式の解の高次漸近展開理論に関する研究  
石毛氏との共同研究により、空間微分を用いた既存の展開理論をベースにさらに積分核の時間微分を用いた新たな展開方法を考案することで、これまでの積分核の可積分性の弱さに起因した展開次数の制限を外すことに成功した。これにより非線形問題に対しても初期値のモーメントの次数に応じた高次漸近展開が可能となった。本成果はすでに国際雑誌に掲載が確定しており、オンラインでは出版済みである。
- (6) 半空間における動的境界条件付き拡散方程式の可解性に関する研究  
Fila 氏と石毛氏との共同研究により、境界上の初期値をゼロとした場合に、内部の初期値が適当な重み付き空間に属する場合に、より広いクラスに属する解の可解性を示した。本成果により、非線形問題への展開に向けた基本解の構成について、関数空間の観点から、非常に大きな示唆が得られた。
- (7) 退化係数を有する非線形拡散方程式の時間大域可解性に関する研究  
Johns Hopkins 大学の Yannick Sire 氏と Jaiyi Nikki Wang 氏との共同研究により、ある種の条件を満たす退化係数を有する拡散方程式に対して、冪乗型の非線形項について、時間大域可解性を分ける臨界指数を導出した。動的境界条件は  $1/2$  乗の分数冪拡散方程式に対応することが知られているが、この問題は一般の分数冪拡散方程式に関連するものであり、より一般の動的境界条件に関連する結果として今後の展開が期待できる結果と言える。本成果はすでに国際雑誌に掲載が確定している。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計8件（うち査読付論文 8件/うち国際共著 4件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Hasegawa Shoichi, Ikoma Norihisa, Kawakami Tatsuki	4. 巻 227
2. 論文標題 On weak solutions to a fractional Hardy?H?non equation, Part II: Existence	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Nonlinear Analysis	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.na.2022.113165	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Fila Marek, Ishige Kazuhiro, Kawakami Tatsuki	4. 巻 74
2. 論文標題 Solvability of the heat equation on a half-space with a dynamical boundary condition and unbounded initial data	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00033-023-02040-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Furioli Giulia, Kawakami Tatsuki, Terraneo Elide	4. 巻 3
2. 論文標題 Heat equation with an exponential nonlinear boundary condition in the half space	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Partial Differential Equations and Applications	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s42985-022-00170-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Ishige Kazuhiro, Kawakami Tatsuki, Okabe Shinya	4. 巻 223
2. 論文標題 Existence of solutions to nonlinear parabolic equations via majorant integral kernel	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Nonlinear Analysis	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.na.2022.113025	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hasegawa Shoichi、Ikoma Norihisa、Kawakami Tatsuki	4. 巻 20
2. 論文標題 On weak solutions to a fractional Hardy--Henon equation: Part I: Nonexistence	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Communications on Pure & Applied Analysis	6. 最初と最後の頁 1559--1600
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3934/cpaa.2021033	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Marek Fila、Kazuhiro Ishige、Tatsuki Kawakami、Johannes Lankeit	4. 巻 40
2. 論文標題 The large diffusion limit for the heat equation in the exterior of the unit ball with a dynamical boundary condition	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Discrete & Continuous Dynamical Systems - A	6. 最初と最後の頁 6529--6546
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3934/dcds.2020289	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Tatsuki Kawakami、Yannick Sire、Jaiyi Nikki Wang	4. 巻 -
2. 論文標題 Fujita exponent for the global-in time solutions to a semilinear heat equation with non homogeneous weights	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Journal of Evolution Equations	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Ishige Kazuhiro、Kawakami Tatsuki	4. 巻 -
2. 論文標題 Refined Asymptotic Expansions of Solutions to Fractional Diffusion Equations	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Dynamics and Differential Equations	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10884-022-10224-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

[学会発表] 計10件(うち招待講演 10件/うち国際学会 4件)

1. 発表者名 Tatsuki Kawakami
2. 発表標題 Solvability of the heat equation on a half-space with a dynamical boundary condition
3. 学会等名 Euro-Japanese Conference on Nonlinear diffusions (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Tatsuki Kawakami
2. 発表標題 Solvability of the heat equation on a half-space with a dynamical boundary condition
3. 学会等名 Evolution Equations and Related Topics - Energy Structures and Quantitative Analysis - (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Tatsuki Kawakami
2. 発表標題 Existence of solutions to nonlinear parabolic equations via majorant integral kernel
3. 学会等名 Seminar on Qualitative Theory of Differential Equations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Tatsuki Kawakami
2. 発表標題 The large diffusion limit for the heat equation with a dynamical boundary condition
3. 学会等名 BIRS-CMO Workshop "New Trends in Nonlinear Diffusion: a Bridge between PDEs, Analysis and Geometry" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 川上竜樹
2. 発表標題 時空間非斉次項を有する半線形拡散方程式の臨界指数
3. 学会等名 第15回応用数理研究会(招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 川上竜樹
2. 発表標題 Existence of solutions to nonlinear parabolic equations via majorant integral kernel
3. 学会等名 鳥取PDE研究集会2021(招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 川上竜樹
2. 発表標題 動的境界条件を有する半線形楕円型方程式及び線形熱方程式の解析
3. 学会等名 応用数理勉強会2021(招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 川上竜樹
2. 発表標題 Existence of solutions to nonlinear parabolic equations via majorant integral kernel
3. 学会等名 HMAセミナー・冬の研究会2022(招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 川上竜樹
2. 発表標題 非整数階時間微分を含む移流拡散方程式について
3. 学会等名 非線形現象の数値シミュレーションと解析2022 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 川上竜樹
2. 発表標題 半空間における指数型非線形境界条件を有する熱方程式について
3. 学会等名 北陸応用数理研究会2022 (招待講演)
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

川上竜樹のホームページ <a href="https://kawakami_math.ryukoku.ac.jp/kawakami.html">https://kawakami_math.ryukoku.ac.jp/kawakami.html</a> 川上 竜樹 -研究者- researchmap <a href="https://researchmap.jp/k-tatsuki">https://researchmap.jp/k-tatsuki</a>
--

6. 研究組織		
氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件



8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
米国	Johns Hopkins University			