

令和 5 年 6 月 1 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2020～2022

課題番号：20K03699

研究課題名(和文)非線形偏微分方程式系の解の大域的解析の進展

研究課題名(英文)To global analysis for solutions of nonlinear partial differential equations
tems

研究代表者

西田 孝明(Nishida, Takaaki)

京都大学・情報学研究科・名誉教授

研究者番号：70026110

交付決定額(研究期間全体):(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文): 熱対流問題の解析において物理パラメーターの変化に応じた解の大域的挙動の研究を行った。Rayleigh-Benard 熱対流問題で、Rayleigh 数(上下の温度差)が大きくなる時は、解析的には現在取扱えず、計算機援用が必須になる。Roll 型の解の挙動を計算機でシミュレーションをして、Rayleigh 数を大きくするとき routes to chaos と呼べる解の遷移を見出した。非圧縮性粘性流体の解を求めるために、擬圧縮性近似をする Chorin の方法がある。Rayleigh-Benard 熱対流問題でその定常解、定常分岐、Hopf 分岐の場合について、その正当性を証明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

熱対流問題で上下の温度差が大きくなるに従って、熱伝導解から定常対流解に分岐し、パターンを形成した後、周期解分岐を起こし、周期倍分岐、周期4倍分岐を経て徐々に chaos 解に遷移する道を見つけた。長期的な予想の困難さの例になる。

非圧縮性粘性流体の解析をその擬圧縮性近似の方法によって行える事の正当性を示した。

非圧縮性条件の困難を避ける一つの方法である。

研究成果の概要(英文): Analysis on global behaviors of solutions according to change of physical parameters in the heat convection problems. When the Rayleigh number (the difference of temperature between the top surface and the bottom) increases far across the critical number in the Rayleigh-Benard heat convection, the present analysis has no theory for the solutions. We made numerical simulations of the roll-type solutions for big Rayleigh numbers and found a route to chaos along bigger Rayleigh numbers.

There is a Chorin's method which makes pseudo-compressible approximations for the solution of incompressible viscous fluids. We made a justification of the method for the stationary solutions, stationary bifurcations and Hopf-bifurcation of Navier-Stokes equations and Rayleigh-Benard equations.

研究分野：非線形偏微分方程式系の解析

キーワード：非線形偏微分方程式系 熱対流問題 Rayleigh-Benard 熱対流 route to chaos 擬圧縮性近似法 粘性流体の自由表面問題

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

(1) Rayleigh-Benard 熱対流問題の解析において、熱伝導解である平衡解からの分岐については、ロール型や六角形型の対流が現れる定常分岐、それによるパターン形成はよく解析されていた。それに続いたパラメーターの増大による解の様子の変化、その安定性、その分岐曲線の追跡などは十分には調べられていない。

(2) Navier-Stokes 方程式や熱対流問題に現れる非圧縮性粘性流体の解析では、その圧力項の非局所性の取扱の困難を避ける方法の一つである、人工的圧縮性を用いる近似方法の正当性を解析的に示しつつある。

(3) 水平領域での粘性非圧縮性流体の自由表面問題の線形系の解の減衰評価の研究を継続している。

2. 研究の目的

非線形偏微分方程式系の解・解空間の大域的解析をめざす時、解空間でのパラメーターによる解の分岐構造を調べることは、基本的な問題であり、分岐理論はその解析のための有力な方法である。しかしながら、それを具体的な問題へ応用するためには、単純分岐の場合でも証明の困難な条件が仮定されている。即ち、分岐を考察する点(解空間での点、即ち、解)において線形化した系のスペクトルに関する情報が必要である。ところが、この線形系(一般に自己共役な作用素でない)のスペクトルの様子はもちろんのこと、この線形系自身もあらかじめ与えられたものではない。何故なら、この点(解)自身も、自明解の場合を除いては、非線形系を解いて求めなければならないものであるから。このように非線形系の解をパラメーターの値に応じて構成的に求めたい。殊に熱対流問題での解の大域的挙動の研究を続ける。

3. 研究の方法

非線形系の解をパラメーターの値に応じて構成的に求めるには、解析的に求められる場合を除いて、計算機援用解析の方法が必須である事になる。現在の解析学だけでは取扱えない部分を含む問題に対して、計算機援用解析の方法を含んだ大域的な解析学として発展させる。

4. 研究成果

(1) 水平領域にある流体を下から熱を加える時の流体運動は、Rayleigh-Benard 熱対流問題として、定式化されている。無次元化のパラメーターである Rayleigh 数と Prandtl 数の変化に応じた解の挙動を大域的に研究することが目的である。Rayleigh 数が小さい時の熱伝導解から臨界 Rayleigh 数 ($Rc = 6.75$) を越えると Roll 型の解や六角形型の解が(定常)分岐する事が示されていた。さらに Rayleigh 数が大きくなる時が問題であるが、解析的には現在取扱えず、計算機援用が必須になる。Rayleigh の定式化に倣って、上下の境界条件が stress-free である時の Roll 型の解の挙動を計算機でシミュレーションをして、Rayleigh 数を更に大きくするとき routes to chaos と呼べる解の変化を見出した。 $Pr = 10$ を固定して、 $Rc < Ra < 41.1 \times Rc$ では、roll 型の解は安定に存在する。その後、Hopf 分岐点が存在し、Roll 型の解は周期解に分岐し、 $42 \times Rc < Ra < 160 \times Rc$ では、roll 型の周期解として存在する、(図1)。それ以後には周期が変化し始める。 $Ra = 175 \times Rc$ では、(2,1) モードが、周期倍分岐を起している。 $Ra = 176 \times Rc$ で、(4,1) モードが周期倍分岐を起し、(2,1) モードは、4 倍周期になる、(図2)。 $Ra = 180 \times Rc$ ではそれぞれの周期は不明瞭になり、 $Ra = 190 \times Rc$ では、

chaos と言える解が得られる。このroute の他に(3,1) モードを含む周期解からのchaos への路も見つかっている。こうして非線形偏微分方程式の場合にもchaos に至る経路に周期倍分岐のシナリオがある事を示した。

(2) 温度供給が一様でない場合の熱対流問題の解析を始めた。

(3) 非圧縮性粘性流体方程式の定常解を求めるために、その非圧縮性条件の持つ困難を避けるために、人工的圧縮性近似をするChorin の方法があり、Navier-Stokes 方程式やRayleigh-Benard 熱対流問題については、その定常解と定常分岐の場合について、その正当性を証明してきた。この近似は、定式化の仕方からして定常解に限られると思われていたのである。しかしながら、塩熱対流問題の分岐においては、平衡解からの最初の分岐にもHopf 分岐(周期解分岐)が現れる場合がある。その場合についても、人工的圧縮性近似が成り立つことの解析的な証明を行なった。

(4) 水平領域での粘性非圧縮性流体の自由表面問題について、線形化方程式の解の時間発展を調べ、自由表面に表面張力が働く場合と働かない場合について、それぞれ時間に関する減衰評価を得た。元の非線形問題の時間大域的な解を構成する基礎になる。

ロール型の解が Hopf 分岐により時間周期解になった様子。

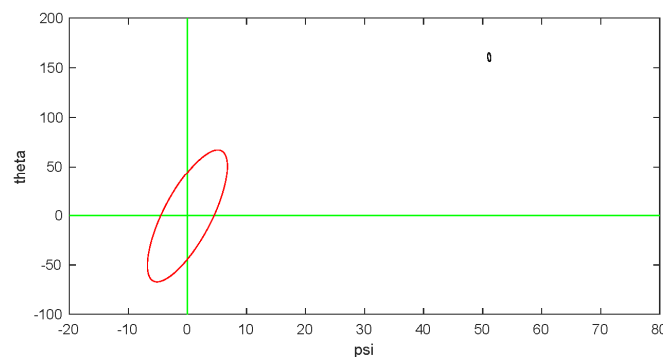


図 1: Periodic roll solution of (2,1)+(4,1)-type for $Ra = 50Rc$, $N = 64$. Black circle and red circle are traces of mode $(\psi_{2,1}(t), \theta_{2,1}(t))$ and mode $(\psi_{4,1}(t), \theta_{4,1}(t))$ respectively.

倍周期、4倍周期が現れたロール型の解。

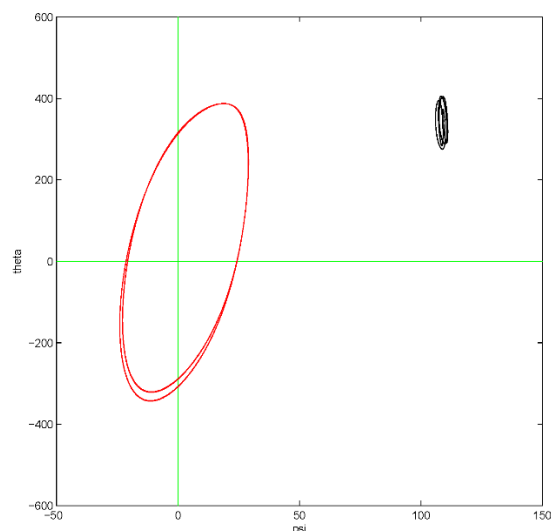


図 2: Period double of mode (4, 1) and period quadruple of mode (2, 1) for $Ra = 176Rc$, $N = 72$.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件／うち国際共著 4件／うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 T. Beale, T. Nishida and Yoshiaki Teramoto	4. 巻 B82
2. 論文標題 Decay of solutions of the Stokes system arising in free surface flow	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku Bessatsu	6. 最初と最後の頁 137,157
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 C.-H. Hsia, Y. Kagei, T. Nishida and Yuka Teramoto	4. 巻 23:60
2. 論文標題 Singular Limit in Hopf Bifurcation for Doubly Diffusive Convection Equations I: Linearized Analysis at Criticality	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal Mathematical Fluid Mechanics	6. 最初と最後の頁 1, 27
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00021-021-00582-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 C.-H. Hsia, Y. Kagei, T. Nishida and Yuka Teramoto	4. 巻 23:59
2. 論文標題 Singular Limit in Hopf Bifurcation for Doubly Diffusive Convection Equations II : Bifurcation and Stability	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal Mathematical Fluid Mechanics	6. 最初と最後の頁 1, 35
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00021-021-00583-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 C.-H. Hsia and T. Nishida	4. 巻 24:38
2. 論文標題 A Route to Chaos in Rayleigh-Benard Heat Convection	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal Mathematical Fluid Mechanics	6. 最初と最後の頁 1, 18
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00021-022-000659-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 T. Nishida and Yoshiaki Teramoto	4. 巻 on line
2. 論文標題 Decay of solutions to the initial boundary value problems of the Stokes system in the half space of the Stokes system arising in free surface flow	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Annali dell 'Universita' di Ferrara	6. 最初と最後の頁 1, 18
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11565-022-00421-w	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計6件 (うち招待講演 4件 / うち国際学会 3件)

1. 発表者名 Nishida Takaaki
2. 発表標題 Routes to chaos in Rayleigh-Benard heat convection
3. 学会等名 Japan-Taiwan Joint workshop on Numerical Analysis and Inverse problems (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 西田 孝明
2. 発表標題 Routes to chaos in Rayleigh-Benard heat convection
3. 学会等名 日本数学会 2021年度年会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Takaaki Nishida
2. 発表標題 A route to chaos in Rayleigh-Benard heat convection
3. 学会等名 Japan-France Joint workshop on interacting particles systems and fluid mechnics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Takaaki Nishida
2. 発表標題 A route to chaos in Rayleigh-Benard heat convection
3. 学会等名 Workshop on bifurcations governed by partial differential equations (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Takaaki Nishida
2. 発表標題 An example of thermal convection in the horizontal layer with non-uniform heat supply
3. 学会等名 Taiwan-Japan Workshop on Numerical Analysis and Inverse Problems (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 西田 孝明
2. 発表標題 熱供給が一樣でない時の熱対流問題
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	寺本 恵昭 (Teramoto Yoshiaki)		

6. 研究組織（つづき）

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	隠居 良行 (Kagei Yoshiyuki)		
研究協力者	夏 俊雄 (Hsia Chun-Hsiung)		

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関