様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　６ 年　６ 月　５ 日現在

機関番号：１６４０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2020～2023
課題番号：２０Ｋ０３７０３

研究課題名（和文）高階分散型写像流に対する幾何解析

研究課題名（英文）Geometric analysis of higher-order dispersive flows

研究代表者
小野寺　栄治（Eiji, Onodera）

高知大学・教育研究部自然科学系理工学部門・准教授

研究者番号：７０５３２３５７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,000,000円

研究成果の概要（和文）：主に、コンパクトケーラー多様体上の曲線流がみたすある４階非線型分散型偏微分方程式およびその初期値問題を考察し、以下の成果を得た。
（１）曲線流の定義域を１次元平坦トーラス、像空間をコンパクト局所エルミート対称空間と設定し、高次ソボレフ空間における初期値問題の時間局所解の一意性を証明した。
（２）曲線流の定義域を実数直線と設定し、一般化橋本変換の方法を発展させ、この偏微分方程式を複素数ベクトル値関数がみたす空間１次元４階非線型分散型偏微分方程式系に変換する方法を与えた。また、変換後の系に関連した、複素数ベクトル値関数がみたすある４階非線型分散型偏微分方程式系の初期値問題の時間局所適切性を確認した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
上記成果(1)について：閉曲線流の場合の像空間への設定という意味ではこれ以上の緩和はほぼ不可能と思われる局所エルミート対称性のもとで初期値問題が一意可解であることが確認された。そのために考案した、像空間をユークリッド空間に等長的に埋め込んだときの局所エルミート対称性の利用法は、他の類似的問題への応用も期待される。
上記成果(2)について：像空間が高次元コンパクトケーラー多様体である場合も含めて統一的に扱うことのできる変換法が与えられた。複素次元が２以上のコンパクトケーラー多様体の構造と単独でない非線型４階分散型偏微分方程式系の構造との対応という融合的観点から更なる研究の発展が期待される。

研究成果の概要（英文）：This research mainly focused on a fourth-order dispersive partial differential equation and the initial value problem for curve flows on a compact K\"ahler manifold. The outline of the research achievements is stated as follows:
(1)We investigated the above initial value problem for closed curve flows on a compact locally Hermitian symmetric space,and proved the uniqueness of a solution for initial data in a Sobolev space with high regularlity.
(2)We investigated the above equation for open curve flows on a compact K\"ahler manifold, and presented a framework that can transform the equation into a system of fourth-order nonlinear dispersive partial differential-integral equations for complex-valued functions, which was achieved by developing the so-called generalized Hasimoto transformation. Moreover, we verified the local-wellposedness of the initial value problem for a related nonlinear system satisfied by complex-valued functions.

研究分野：偏微分方程式、幾何解析

キーワード：非線型分散型偏微分方程式

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１（共通）

１．研究開始当初の背景

概エルミート多様体に値を取る写像流(時間パラメータ付きの写像)がみたす非線型分散型偏微分方程式を分散型写像流方程式、その解を分散型写像流と総称することにする。実２次元球面値の写像流に対する分散型写像流方程式の例が数理物理学との関連で現れる。また、エルミート対称空間やケーラー多様体に値をとる写像流に対する分散型写像流方程式の例が可積分系理論や幾何学を背景として現れる。一般に、分散型と呼ばれる偏微分方程式の初期値問題の可解性は、方程式の低階項の構造に本質的に影響を受ける。そのため、分散型写像流方程式の構造は、写像流の定義域や像空間として設定される多様体の幾何構造と密接な関係があると考えられる。本研究は、分散型写像流方程式の構造やその初期値問題の解法に関して貢献を目指すものである。この方面では、シュレーディンガー写像流方程式とよばれる概エルミート多様体値写像流がみたす２階の非線型分散型偏微分方程式に関する研究が 1990 年代後半以降大いに進展した。2010年頃以降、ケーラー多様体や概エルミート多様体に値を取る曲線流がみたす３階や４階の空間１次元非線型分散型偏微分方程式に関する類似的研究が、本研究代表者による仕事も含めて、幾つか見受けられるようになった。しかしながら、高階の分散型写像流方程式に関しては、階数が上がるに伴って偏微分方程式としての構造がより複雑になるうえ、方程式の幾何学的定式化の仕方にも自由度が増えるため、シュレーディンガー写像流方程式に比べると、十分には調べられていない状況であった。

２．研究の目的

高階分散型写像流方程式の例に対して、以下の研究を推進することである：

・ソボレフ空間の枠組みで初期値問題の時間局所解の存在と一意性およびその時間大域的延長可能性を調べる研究
・分散型写像流方程式の構造を、複素数値関数がみたす非線型分散型偏微分方程式及びその系に対する数学解析の枠組みで説明する研究

主な研究対象は、ケーラー多様体値の曲線流がみたすある空間１次元４階非線型分散型偏微分方程式である。この偏微分方程式は、像空間を実２次元球面と設定すると、古典スピン系の連続極限モデルや渦糸の３次元運動モデルとの関連をもつ。また、像空間を局所エルミート対称空間と設定すると、可積分系理論と幾何学を背景に提案された Generalized Bi-Schrödinger flow の方程式と一致する。この偏微分方程式に関して、次の２つの立場からの研究の推進を試みる：

（１）　初期値問題の解法研究：初期値問題を解くためには、いわゆる可微分性の損失による困難の克服が課題となる。曲線流の定義域を１次元平坦トーラス、像空間をコンパクト局所エルミート対称空間と設定する場合、高次ソボレフ空間の枠組みで初期値問題の時間局所解が存在することは、本研究代表者の先行研究により示されていた。可微分性の損失が解消されるような方程式の良い構造が像空間の局所エルミート対称性から従うことによる。ただし、定義域のコンパクト性により分散型偏微分方程式の解に対する平滑化効果が期待できないため、像空間に対する仮定の緩和はほぼ不可能であると思われた。また、その解の一意性は未解決であった。本研究では、この解の一意性の証明を与えることを目指した。なお、定義域を実数直線に設定し直すと、像空間をコンパクトケーラー多様体の場合まで緩和しても時間局所解の存在と一意性がしたがうことはほぼ明らかであった。これは、先行研究における類似の４階分散型写像流方程式に対する平滑化効果を利用した解法がほぼそのまま通用することによる。

（２）　複素数ベクトル値関数がみたす偏微分方程式系との対応を調べる研究：曲線流の定義域を実数直線、像空間を複素グラスマン多様体に設定する場合、空間無限遠で基点を持つ曲線流に対するこの分散型写像流方程式が、複素数行列値関数がみたす（積分型非局所項付きの）ある空間１次元４階非線型偏微分方程式と同値であることが、他の研究者による先行研究により示されていた。上記（１）を考慮すると、像空間をコンパクトな局所エルミート対称空間やより一般のコンパクトケーラー多様体に設定したときに、対応する非線型偏微分方程式系の構造がどのようになるかが興味深かったが、その点については調べられていなかった。本研究では、これらの対応を明らかにすることを目指した。

３．研究の方法

上記項目２の（１）について：

この問題設定下で解の一意性を示すためには、多様体値の２つの解の差および解の偏導関数同士の差を定義する方法と、それらの差がみたす方程式に対する可微分性の損実の解消法をうまく両立させる必要がある。そのため、解の存在の証明よりも複雑な議論を要することが想定された。本研究では、像空間を高次元ユークリッド空間に等長的に埋め込んで、２つの解の差およびそれらの偏導関数同士の差を実ベクトル値関数として定義するアプローチを採用した。そして、それらがみたす偏微分方程式系に対してある種のゲージ変換を融合したエネルギー法を適用することを試みた。高次元ユークリッド空間への等長埋め込みを使うこと自体は多様体値写像流

がみたす偏微分方程式の研究においてはもはや標準的であると思われるが、このアプローチの採用に伴い、埋め込まれたユークリッド空間の中での像空間の局所エルミート対称性の利用法を構築する必要が生じた。これについては、リーマン幾何学に関連する文献や論文なども参照しながら、本研究の問題解決に有用と思われる利用法を考案した。
上記項目２の（２）について：
コンパクトケーラー多様体値のシュレーディンガー写像流方程式に関しては、写像流に沿う平行な動標構を用いることによって、複素数値関数のみたす非線型シュレーディンガー方程式またはその系に変換する方法が構築されていた。この方法は一般化橋本変換とよばれる。本研究では、この方法に倣って、考察対象である４階の分散型写像流方程式を複素数値関数のみたす非線型分散型偏微分方程式系に変換することを試みた。ただし、方程式の階数が高く、また、方程式がリーマン曲率テンソルを用いて定式化されていたため、この方法の枠組みにリーマン曲率テンソルの基本性質がどのように反映されてくるかを明確にする必要があった。先行研究ではこの情報が十分ではなかったので、本研究で明確にすることにした。更に、幾つかの像空間の例に対して、変換後の方程式系の構造をより詳しく調べ、先行結果との比較検討を行った。また、変換後の非線型分散型方程式系の非線型項の構造を少し一般化したうえで、その初期値問題のソボレフ空間における時間局所適切性の証明を作っておくことにした。

４．研究成果
主に、上記の曲線流がみたす４階非線型分散型写像流方程式に関して上記の方法に沿って研究を進めた。

（１） 曲線流の定義域を１次元平坦トーラス、像空間をコンパクト局所エルミート対称空間と設定する場合、高次ソボレフ空間における初期値問題の時間局所解の一意性がしたがうことを証明した。これにより、像空間の設定という意味ではこれ以上の緩和はほぼ不可能と思われる局所エルミート対称性のもとで初期値問題が一意可解であることが確認された。これを証明するために本研究で考案した、像空間をユークリッド空間に等長的に埋め込んだときの局所エルミート対称性の利用法は、他の類似的問題にも応用できるのではないかと期待している。この成果は査読付き学術雑誌への掲載が決定し、出版済みである。

（２） 曲線流の定義域を実数直線、像空間をコンパクトケーラー多様体と設定する場合、一般化橋本変換の方法を発展させることにより、空間無限遠で基点を持つ曲線流に対するこの方程式を複素数ベクトル値関数がみたす（積分型の非局所項を持つ）空間１次元４階非線型分散型偏微分方程式系に変換する方法を与えた。さらに以下のように３つの像空間の例に対して変換後の方程式系の構造を詳しく調べた。

① 像空間がコンパクトリーマン面の場合、変換後の方程式系は単独の方程式になるが、この方程式と 2021 年度の他の研究者により得られた先行結果とが矛盾しないことを確認した。

② 像空間のコンパクトケーラー多様体の複素次元が２以上で定正則断面曲率をもつ場合、変換後の方程式系に積分型非局所項が現れることを確認した。

③ 像空間がコンパクト複素グラスマン多様体の場合、変換後の方程式系が、（項目２の（２）で述べた）先行研究で得られていた複素数行列値関数に対する積分型非局所項付き空間１次元４階非線型偏微分方程式に書き換えられることを確認した。さらに、この先行研究での方法と本研究の変換方法が見かけ上は異なるにも関わらず、実質的に同じ変換を与えている理由についても考察を行った。

本研究により、像空間が高次元コンパクトケーラー多様体である場合も含めて統一的に扱うことのできる変換法が与えられた。複素２次元以上のコンパクトケーラー多様体の構造と単独でない非線型４階分散型偏微分方程式系の構造との対応、という融合的観点から更なる研究の発展が期待される。

（３）複素数ベクトル値関数がみたすある空間１次元４階非線型分散型偏微分方程式系の初期値問題を考察し、高次ソボレフ空間における時間局所適切性を確認した。この偏微分方程式系は、上記項目４の（２）で得られた積分型非局所項付きの空間１次元４階非線型分散型偏微分方程式系の非線型項の構造を少しだけ一般化したものである。他の研究者による先行論文において、上記項目２の（２）で述べた行列値微分方程式に対する時間局所解の存在が期待されており、本研究の結果自体はその期待に対する一つの肯定的解答を与えている。ただし、本質的には単独方程式の場合の解法を繰り返して済む設定しか扱っておらず、偏微分方程式論における研究成果としては更なる改良の余地があると思われる。しかしながら、本研究は、上記項目２の（１）で述べた、定義域が実数直線で像空間がコンパクトケーラー多様体である場合の４階分散型写像流方程式の初期値問題が時間局所的に一意可解であることを変換後の非線型偏微分方程式系のレベルで説明することを動機とするものであり、その目標はある程度クリアできたと考えている。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計2件（うち査読付論文　2件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　1件）

１．著者名 Onodera Eiji、Yamasaki Haruka	４．巻 503
２．論文標題 A fifth-order dispersive partial differential equation for curve flow on the sphere	５．発行年 2021年
３．雑誌名 Journal of Mathematical Analysis and Applications	６．最初と最後の頁 ―
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jmaa.2021.125297	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 ―

１．著者名 Onodera Eiji	４．巻 32
２．論文標題 Uniqueness of 1D Generalized Bi-Schroedinger Flow	５．発行年 2022年
３．雑誌名 The Journal of Geometric Analysis	６．最初と最後の頁 ―
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s12220-021-00787-x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 ―

〔学会発表〕　計0件

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

―

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関