

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 6 年 9 月 10 日現在

機関番号：32642

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2020～2023

課題番号：20K03706

研究課題名(和文) ソボレフ臨界超臨界 の非線形偏微分方程式の解析

研究課題名(英文) Study for nonlinear partial differential equation with Sobolev critical/supercritical nonlinearity

研究代表者

菊池 弘明 (Kikuchi, Hiroaki)

津田塾大学・学芸学部・教授

研究者番号：00612277

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：一つ目の成果は、シリンダー上の非線形シュレディンガー方程式の定在波の存在についてである。それまでは、定在波が存在するためには、べき型非線形項の指数に制限があったが、その制限を外した。二つ目の成果は、二重べき非線形シュレディンガー方程式の基底状態についてである。この方程式は、臨界振動数があり、それを境に基底状態の存在・非存在が分かっていたが、ちょうど臨界のときは不明であった。そこで、爆発解析という手法を用いて、この場合は存在することが分かった。三つ目の成果は、二重べき非線形シュレディンガー方程式の解の大域挙動である。基底状態と同じエネルギーを持つ解の大域挙動を初期により分類出来た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

シリンダー上の非線形シュレディンガー方程式の定在波の存在で用いた手法は、他の方程式にも応用が期待できるため、汎用性があるものと思われる。二重べき非線形シュレディンガー方程式の基底状態の存在・非存在については、これまでみられなかった現象が起きることを証明でき、学術的に興味深い。最近では、対応する楕円型方程式の正值解を分類することも出来、今後も進展が期待される。二重べき非線形シュレディンガー方程式の解の大域挙動に関しては、既存の手法とは異なり、one-pass theoremと呼ばれる定理を用いて証明した。この定理が成立すれば、一般の非線形項に対して同様の結果を得られることが期待出来る。

研究成果の概要(英文)：First result is concerned with the existence of a standing wave for nonlinear Schrodinger equation on the cylinder. We needed technical conditions on the nonlinearity for the existence of the standing waves so far. We succeed to remove the conditions and proved that the standing waves exist.

Second result is about the ground state for double-power nonlinear Schrodinger equations. From the previous studies, we know that there exists a critical frequency for the existence/non-existence of the ground state. However, it was not known whether the ground state exists or not on the critical one. By using the blowup analysis, we found that there exists the ground state in this case.

Finally, we studied the global dynamics of the solutions to the double-power nonlinear Schrodinger equations. We classify the dynamics of solutions which have the same energy of the ground state by the initial data.

研究分野：非線形偏微分方程式

キーワード：定在波 基底状態 閾値解 分類 モース指数 非退化性

様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

1. 研究開始当初の背景

(1) シリンダー上の非線形シュレディンガー方程式の基底状態の存在について

シリンダー上の非線形シュレディンガー方程式の定在波について調べた。ここで、定在波とは、時間に関しては位相の周期的変動にしか依存しない解のことである。シリンダー上の非線形シュレディンガー方程式は、「線ソリトン」と呼ばれる明示的に書ける定在波が存在する。このとき、ある振動数が存在して、そこから分岐する解があることが知られている。しかしながら、その分岐解が存在するためには、非線形項に技術的な条件が付いていた。

(2) 二重べき非線形シュレディンガー方程式の基底状態の存在・非存在について

二つのべき乗型の非線形項で、一つはソボレフ臨界、もう一つはソボレフ劣臨界である非線形シュレディンガー方程式の定在波の存在・非存在について考えた。特に、ここでは、定在波の中でも、基底状態について調べた。ここで基底状態とは、対応する最小化問題の最小元のことである。このとき、最小化問題の最小元であることから、基底状態はある非線形楕円型方程式の解であることも分かる。それまでの研究では、ある条件の下では、臨界振動数があり、それを境に基底状態の存在・非存在が分かっていたが、臨界振動数のときは不明であった。

(3) 二重べき非線形シュレディンガー方程式の解の大域挙動

非線形シュレディンガー方程式の解の大域挙動を初期値により分類できないかを考察した。1(2)で記載したように、この方程式には、基底状態と呼ばれる重要な解がある。それまでの研究では、エネルギーが基底状態のそれよりも小さい場合の解については初期値により大域挙動を調べることが出来、有限時間しか解が存在しない爆発解と時間大域的に存在し、時刻無限大では、線形の解に収束する散乱解の2種類があることが知られている。

2. 研究の目的

(1) シリンダー上の非線形シュレディンガー方程式の基底状態の存在について

1(1)で記述したように、ある振動数が存在して、線ソリトンから分岐する解があることが知られている。しかし、それまではこの分岐解が存在するためには、非線形項に技術的な条件が付いていた。そこで、この技術的な条件を取り除くことが出来ないかを試みた。

(2) 二重べき非線形シュレディンガー方程式の基底状態の存在・非存在について

1(2)で説明したように非線形シュレディンガー方程式の基底状態の存在・非存在に関する臨界振動数があり、ちょうど臨界の時の基底状態は存在するかどうか不明であった。そこで、この問題を解決することが目的であった。

(3) 二重べき非線形シュレディンガー方程式の解の大域挙動

1(3)で記載したように基底状態よりも小さいエネルギーを持つ解の大域挙動は分かっていた。そこで、今度は基底状態と同じエネルギーを持つ場合の解の挙動はどのようになるかを調べた。同様の結果は、単純べき非線形項に対しては得られていたが、その手法は一般の非線形項については直ちに適用できないように思われた。

3. 研究の方法

(1) シリンダー上の非線形シュレディンガー方程式の基底状態の存在について

既存の結果と同様にリャプノフ・シュミットの方法を用いて、考える楕円型方程式を分岐方程式と補助方程式の二つの方程式に分解したが、新しいアイデアとして、この補助方程式の解の性質を解析することであった。これを精密に調べることで、結果を改善出来ないかと考えた。

(2) 二重べき非線形シュレディンガー方程式の基底状態の存在・非存在について

臨界振動数のときの基底状態が存在することを調べるために、爆発解析と呼ばれる手法を用いた。これは、基底状態が存在しないとすると、劣臨界の振動数を持つ基底状態の原点での値が発散することが示すことが出来、このことから矛盾が示せないかという手法である。

(3) 二重べき非線形シュレディンガー方程式の解の大域挙動

2(3)で説明したように、基底状態と同じエネルギーを持つ場合の解の挙動についての既存の解析は、一般の非線形項に適用することは難しいように思われる。そのため、ここでは、Nakanishi and Schlag(2011)による one-pass theorem というものを用いることで、この困難を克服した。

4 . 研究成果

(1) シリンダー上の非線形シュレディンガー方程式の基底状態の存在について

3(1)で記述した方法により、技術的な条件を取り除き、べき乗型非線形項の指数が1より大きければ、線ソリトンから分岐する解が存在することが出来た。

(2) 二重べき非線形シュレディンガー方程式の基底状態の存在・非存在について

3(2)で説明した爆発解析を用いて、一部の場合を除き、臨界振動数の基底状態が存在することが分かった。その後、この基底状態に対応する楕円形方程式においては、正值解が2つ存在することが、Wei and Wu(2023)によって示された。その2つの正值解の一つは、基底状態である。そこで、正值解の分類が出来ないかを試みた。すると、正值解は、Wei and Wu(2023)によって示された2つしかないことが分かった。また、ある条件の下では、個々の正值解の非退化性やモース指数を調べることが出来た。

それ以外にも、基底状態の一意性について、既存の結果より直接的な証明を与えることが出来た。

(3) 二重べき非線形シュレディンガー方程式の解の大域挙動

3(3)に記述した one-pass theorem を用いて、基底状態と同じエネルギーを持つ場合の解の挙動を解析することが出来た。得られた結果を述べると、まず、基底状態と同じエネルギーを持つ解の中には、正の方向の時刻無限大では、基底状態に漸近し、負の方向の時刻無限大で爆発、もしくは、線形の解に近づく特別な解が存在することが分かった。これは基底状態より小さいエネルギーには無いものである。そして、その特別な解を含めて、全部で7種類の異なる挙動をする解が存在することが分かった。さらには、初期値により、それらの解の大域挙動を分類することが出来た。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計7件（うち査読付論文 7件/うち国際共著 4件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Akahori Takafumi, Bahri Yakine, Ibrahim Slim, Kikuchi Hiroaki	4. 巻 1
2. 論文標題 Pitchfork Bifurcation at Line Solitons for Nonlinear Schrodinger Equations on the Product Space $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Annales Henri Poincare	6. 最初と最後の頁 1~31
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00023-023-01370-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Hamano Masaru, Kikuchi Hiroaki, Watanabe Minami	4. 巻 20
2. 論文標題 Threshold solutions for the 3D focusing cubic-quintic nonlinear Schrodinger equation at low frequencies	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Dynamics of Partial Differential Equations	6. 最初と最後の頁 263~297
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4310/dpde.2023.v20.n4.a1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Akahori Takafumi, Ibrahim Slim, Kikuchi Hiroaki, Nawa Hayato	4. 巻 334
2. 論文標題 Non-existence of ground states and gap of variational values for 3D Sobolev critical nonlinear scalar field equations	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Differential Equations	6. 最初と最後の頁 25~86
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jde.2022.06.016	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Akahori Takafumi, Ibrahim Slim, Kikuchi Hiroaki, Hayato Nawa	4. 巻 272
2. 論文標題 Global dynamics above the ground state energy for the combined power-type nonlinear Schrodinger equations with energy-critical growth at low frequencies	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Memoirs of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1090/memo/1331	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Bahri Yakine, Ibrahim Slim, Kikuchi Hiroaki	4. 巻 33
2. 論文標題 Transverse Stability of Line Soliton and Characterization of Ground State for Wave Guide Schrodinger Equations	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Dynamics and Differential Equations	6. 最初と最後の頁 1297 ~ 1339
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10884-020-09937-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Kikuchi Hiroaki, Watanabe Minami	4. 巻 27
2. 論文標題 Existence of a ground state and blowup problem for a class of nonlinear Schrodinger equations involving mass and energy critical exponents	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA	6. 最初と最後の頁 1 ~ 32
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00030-020-00660-w	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Bahri Yakine, Ibrahim Slim, Kikuchi Hiroaki	4. 巻 1
2. 論文標題 Remarks on solitary waves and Cauchy problem for Half-wave-Schrodinger equations	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Communications in Contemporary Mathematics	6. 最初と最後の頁 1 ~ 31
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S0219199720500583	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計14件 (うち招待講演 11件 / うち国際学会 5件)

1. 発表者名 菊池弘明
2. 発表標題 Positive solutions to stationary double power nonlinear Schrodinger equations
3. 学会等名 Non-compactness phenomena on critical problems and related topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 菊池弘明
2. 発表標題 Positive solutions to stationary double power nonlinear Schrodinger equations
3. 学会等名 発展方程式とその周辺-エネルギー構造と解の定量的解析- (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 菊池弘明
2. 発表標題 空間3次元における二重べき非線形シュレディンガー方程式の基底状態
3. 学会等名 日本数学会2022年度秋季総合分科会 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 菊池弘明
2. 発表標題 Uniqueness of ground states for double power nonlinear Schrodinger equations
3. 学会等名 Workshop on Non-compact Variational Problems and Related Topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 菊池弘明
2. 発表標題 Threshold solutions for the 3D focusing cubic-quintic nonlinear Schrodinger equation
3. 学会等名 The 24th Northeastern Symposium on Mathematical Analysis (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 菊池弘明
2. 発表標題 Uniqueness of ground states for double power nonlinear Schrodinger equations
3. 学会等名 精密解析による非線形問題の新展開
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 菊池弘明
2. 発表標題 R. Killip, J. Murphy and M. Visan Cubic-quintic NLS: scattering beyond the virial threshold (preprint) の論文紹介
3. 学会等名 RIMS共同研究グループ型A「線形および非線形分散型方程式の研究の進展」(招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 菊池弘明
2. 発表標題 Construction of a bifurcation branch from line solitons for nonlinear Schrodinger equations on product space $R \times T$
3. 学会等名 オンラインによる微分方程式セミナー
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 菊池弘明
2. 発表標題 Construction of a bifurcation branch from line solitons for nonlinear Schrodinger equations on product space $R \times T$
3. 学会等名 南大阪応用数学セミナー(招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 菊池弘明
2. 発表標題 Construction of a bifurcation branch from line solitons for nonlinear Schrodinger equations on product space
3. 学会等名 第5回 反応拡散方程式と非線形分散型方程式の挙動 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 菊池弘明
2. 発表標題 Nondegeneracy of ground states for double power nonlinear Schrodinger equations
3. 学会等名 RIMS 共同研究 (グループ型 A) 「非線形問題の精密解析」
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 菊池弘明
2. 発表標題 二重べき非線形シュレディンガー方程式の基底状態の非退化性について
3. 学会等名 NLPDE Spring セミナー (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Hiroaki Kikuchi
2. 発表標題 Existence of a ground state and blowup problem for a class of nonlinear Schrodinger equations
3. 学会等名 2020 CMS Winter Meeting (session: Nonlinear PDEs and kinetic problems) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 菊池弘明
2. 発表標題 Ground states to combined power-type nonlinear Schrodinger equations in three space dimensions
3. 学会等名 京都大学NLPDE seminar (招待講演)
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

菊池弘明のホームページ https://edu.tsuda.ac.jp/~hiroaki/profile.html
--

6. 研究組織		
氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------