

令和 6 年 5 月 23 日現在

機関番号：13101

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2020～2023

課題番号：20K03714

研究課題名(和文) 閉曲面上のグラフの生成定理と局所変形理論の融合的研究

研究課題名(英文) Integrated study of generating theorem and local deformation theory of graphs on closed surfaces

研究代表者

鈴木 有祐 (Suzuki, Yusuke)

新潟大学・自然科学系・教授

研究者番号：10390402

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：1930年代のWagnerの結果を皮切りに、グラフの局所変形に関する研究は様々な方向性をもち発展を遂げてきた。一方、グラフの生成定理は、四色定理の証明に代表されるように、命題を帰納法で証明する際の強力なツールであるがそれ自身も独立した研究テーマである。我々は、上記の2つの研究テーマ及び、それらの境界に位置する問題に対していくらかの結果を得ることができた。特に、一般の閉曲面上の多面体的四角形分割に対して、既約なグラフを有限個にするための縮小操作を8個に特定することに成功した。また、任意の2つの多面体的四角形分割が、cubical flipと呼ばれる変形で互いに移り合うことを証明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

組合せトポロジー分野でも、Alexander (1930) による基礎的な結果を出発点に多くの結果が存在している。今回、組合せトポロジーと(我々の)位相幾何学的グラフ理論が接触し、その境界に位置する問題に対する研究成果を出したことは大変意義深い。当該研究は我々が長年蓄積してきた局所変形問題と生成定理、それぞれの結果から得られる知見やグラフのリストを用いて行ったものであり、学術的独自性を持ち価値がある。グラフの変形に関する研究は、離散幾何や計算機科学分野でも盛んにおこなわれており、そこでの問題創出を始め、その進展にも影響を及ぼすことが期待できる。

研究成果の概要(英文)：Starting with Wagner's result in the 1930s, research on local transformations of graphs embedded on closed surfaces has developed in various directions. On the other hand, the generating theorem of graphs is a powerful tool for proving propositions by induction, as in the proof of the Four-Color Theorem, but it is also an independent research topic in its own right. We have obtained some results for the two research topics above, and for problems that lie on the boundary between them. In particular, for polyhedral quadrangulations of closed surfaces, we have succeeded in identifying eight reductional operations to reduce such graphs to a finite number of irreducible graphs. We also proved that any two polyhedral quadrangulations can be transformed into each other by a sequence of local transformations called cubical flips, which vary the number of vertices of graphs.

研究分野：位相幾何学的グラフ理論

キーワード：グラフ 生成定理 局所変形 多面体的 四角形分割 偶三角形分割

1. 研究開始当初の背景

Wagner による三角形分割の対角変形の結果 (図1) 以後, 閉曲面上に埋め込まれた (辺の交差なく描かれた) グラフの局所変形に関する研究は, 様々な方向性をもち発展を遂げてきた. (一般的に, その頂点数を保存する変形を用いる.) 特に, 四角形分割や偶三角形分割 (各頂点の次数が偶数) に対する局所変形は, それぞれ, サイクルパリティ,  $S_3$ -モノドロミーという閉曲面の代数的不変量を保存するものであり, 豊かな研究が展開されている. また “変形の回数” を見積もる研究は, 様々な条件のもと, 計算機科学分野の研究者達を巻き込んだ研究が行われてきた. (Wagner の証明では  $(n^2)$  回の変形が必要だが, 実際は  $O(n)$  回で十分でありそのオーダーはベストであることが知られている.) 一方, 閉曲面  $F^2$  上のあるグラフのクラス  $C$  (例えば, 球面上の三角形分割全体等) を考えた際,  $C$  に属する全てのグラフを “既約” と呼ばれるいくつかの限られたグラフから, いくつかの拡張操作を用いて作り出そうというのが ( $C$  の) 生成定理である. 1934 年, Steinitz と Rademacher により最も基本的な, 球面上の三角形分割の生成定理が得られたのを出発点に, 様々なグラフのクラスの生成定理が得られている. 特に, 偶三角形分割 (各頂点の次数が偶数) に対する以下の定理は本研究に関連の深いものである. (その 2 つの操作は, 図2 の BES と BTS の条件を緩和したものである.)

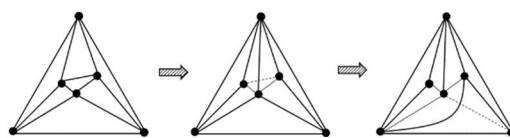


図1 三角形分割の対角変形

既約

定理 1 (Batagelj, 1984)

球面の任意の偶三角形分割は正八面体グラフから 4-頂点分割と正八面体の追加を繰り返すことにより得られる.

上記の定理において, その既約グラフの族は {正八面体グラフ} であるが, 他の生成定理においては, 複数個の既約グラフが存在するのが一般的である. 例えば, 射影平面上の既約三角形分割は 2 個 (Barnette), トーラス上のそれは 21 個 (Lawrencenko) あることが知られている. グラフの生成定理自体は, しばしば, グラフの彩色に関する命題等を証明する際, 帰納法の強力なツールとして活躍することがある. 良く知られている四色定理の証明に現れる “不可避集合及び既約配置” の概念はまさにそれであるし, 上記の定理 1 を用いることにより, 球面上の偶三角形分割が 3 色で頂点彩色可能なことなどが比較的簡単に示せる. しかし単に命題の証明のためのツールというだけではなく, “生成定理” それ自体も独立した研究テーマとして多くの結果が存在している.

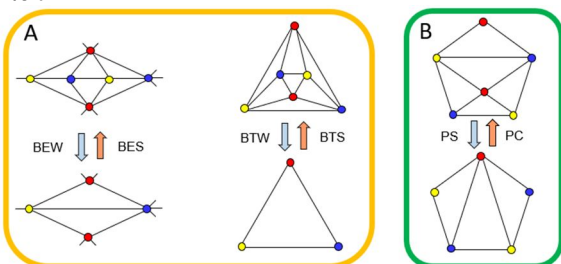


図2 Izvestiev 等の用いた変形

2017 年, 最高峰の数学雑誌の一つである Advances in Mathematics に組合せトポロジーを専門とする Izvestiev 等の論文が掲載された. その主定理は 「(高次元の) ある種の単体的複体どうしがいくつかの変形によって互いに移りあう」というものであったが, この問題を 2 次元に限定すると, 我々が継続的に議論してきた 「閉曲面上の 3-染色的偶三角形分割の変形問題」ととらえることができた. ただし, 上記の論文で用いられている 6

個の変形 (図2) は, “頂点数が増加・減少する変形” であり, 実際, 我々が生成定理において用いていた拡張操作や (その逆の) 縮小操作そのものであった. 申請者はこの新しいタイプの変形問題に強い興味を持ち, その後, この論文の紹介者である早稲田大学の村井氏と 6 個の変形の必要性について議論を行い, 彼らの論文に掲載されていた 「問題」 を解決することに成功した. (その結果は, 数学の一般紙である Proceedings of the American Mathematical Society に掲載されている.)

2. 研究の目的

本研究では, 従来, 位相幾何学的グラフ理論でそれぞれ盛んにおこなわれてきた局所変形問題と生成定理の境界にある新しい変形問題を設定・解決し, 最終的にはそのグラフのクラスの本質を記述する統一

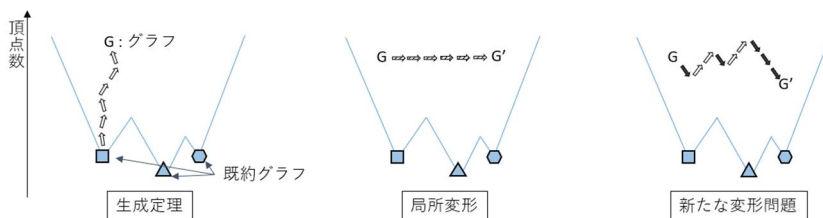


図3 新たな変形問題のイメージ

的な理論を構築することを目的とする。また、既約グラフの有限性に着目し、既存の生成定理を統一して記述できるような定義や表記方法などを導入し、分散している生成定理の結果をまとめて分野全体の発展に貢献する。

### 3. 研究の方法

我々が長年蓄積してきた局所変形問題と生成定理、それぞれの結果から得られる知見や極小グラフのリストを用いて研究を行った。特に、閉曲面上のグラフの生成定理は、その目的や研究の方向性ごとにバラバラの結果が存在している状態であったため、特に、その既約グラフの有限性に着目し既存の生成定理を整理するところから研究を開始した。研究の過程において得られた結果を適宜、研究集会等で発表し、近辺の研究者からの意見を参考にして研究を推進した。また、情報収集やある特定のクラスのグラフを分類する作業などは、自身の研究室に所属する、博士前期・後期課程の学生と共同で行うことで研究の効率化を図った。

### 4. 研究成果

本研究課題において得られた主な結果は以下のとおりである。

#### (1) 既約グラフの有限性に着目した良い生成定理に関する結果

閉曲面上に埋め込まれたグラフが3-連結かつ3-representativeであるとき、そのグラフは多面的であるという。球面もしくは平面上の多面的グラフの研究は多数存在するが、一般的に“良い”埋め込みとされていながら、他の閉曲面上の(三角形分割以外の)多面的グラフに関する具体的な結果は少ない。我々は、一般の閉曲面上の多面的四角形分割に焦点を絞って研究を行い、既約なグラフを有限個にするための極小操作を8個に特定した。この結果をまとめた論文は国際的な専門誌である *Ars Mathematica Contemporanea* に掲載されている。また、射影平面上の偶三角形分割に対して  $Q_4$ -縮約という操作を導入し、それを用いて得られる生成定理と、既存の縮小操作による結果を比較した結果をまとめた論文も *Discrete Mathematics* に掲載されている。(  $Q_4$ -既約偶三角形分割はグラフの無限列として表現されるが、それらのグラフは Projective-triangular cupola (図4) と名付けた部分グラフを含んでおり、その構造が完全に特定されている。) 本論文の導入部分では、既存の閉曲面上のグラフの生成定理を表にまとめ、各生成定理に付された条件などが比較しやすいように工夫している。

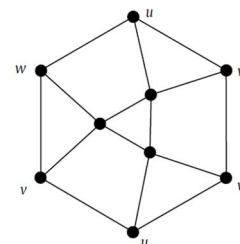


図2 Projective-triangular cupola

#### (2) オイラー標数-8の閉曲面上の例外的3-染色的三角形分割の決定

P-splitting と P-contraction と呼ばれる変形を用いると「有限個の例外グラフを除き、閉曲面  $F^2$  上の任意の2つの3-染色的三角形分割は互いに移りあう」という事実が存在する。種数の低いいくつかの閉曲面に対しては、上記の有限個の例外(例外的3-染色的三角形分割と呼ばれる)のリストは完全に決定されており、これまで知られている例外的3-染色的三角形分割は完全三部グラフに限られていた。(完全三部グラフが三角形分割として埋め込まれていれば、それが例外的3-染色的三角形分割になっていることは明らかである。) 本研究において、種数-8の閉曲面上で唯一の例外的3-染色的三角形分割が存在することを示した。それは  $K_{5,5,5}$  から6-閉路上の辺を除去したグラフになっており、完全三部グラフではない例外的3-染色的三角形分割としては初めて発見されたものになっている。

#### (3) Izvestieveらの結果の四角形分割への拡張

閉曲面上の四角形分割に正六面体グラフを張り合わせることで、その表面に現れるグラフをもとのグラフから局所変形によって得られたものと考え、それらの変形で与えられた2つのグラフが互いに移りあうかという問題を考えた。この問題に対しては Funar の結果が存在するが、この論文を注意深く読み進めると、書かれている内容に一部誤りがあることが分かった。

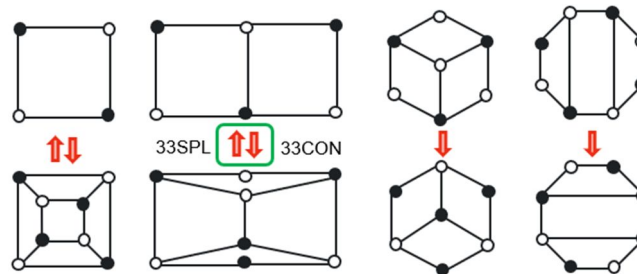


図3 正六面体の張り合わせで得られる局所変形

(Funar ともコンタクトを取りその事実を確認済みである。) 我々はこの本質的な誤りを正し、また、これらの結果を一般の閉曲面上の多面的四角形分割に拡張することに成功した。上述の議論で使用する局所変形は図5の通りであるが(cubical flipと呼ばれる)、その局所変形の集合の極小性についても議論を行い、図内の33SPLと33CONと呼ばれる変形はどちらか一方あれば良いことを示した。この事実に関しては、2024年に行われた国際会議 35th Workshop on Topological Graph Theory (TGT35)にてその事実を含んだ講演を行い、国内外の研究者等とその内容に関する議論を行った。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Suzuki Yusuke	4. 巻 23
2. 論文標題 Finitizable set of reductions for polyhedral quadrangulations of closed surfaces	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Ars Mathematica Contemporanea	6. 最初と最後の頁 #P1.04
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.26493/1855-3974.2704.31a	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Shibuya Hikari, Suzuki Yusuke	4. 巻 344
2. 論文標題 1-Embeddability of complete multipartite graphs on the projective plane	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Discrete Mathematics	6. 最初と最後の頁 No.112518, 14pp
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.disc.2021.112518	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Hasegawa Jun, Suzuki Yusuke	4. 巻 345
2. 論文標題 Q4-irreducible even triangulations of the projective plane	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Discrete Mathematics	6. 最初と最後の頁 No.112736, 10pp
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.disc.2021.112736	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Hamanaka Hiroaki, Nakamoto Atsuhiko, Suzuki Yusuke	4. 巻 36
2. 論文標題 Rhombus Tilings of an Even-Sided Polygon and Quadrangulations on the Projective Plane	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Graphs and Combinatorics	6. 最初と最後の頁 561 ~ 571
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00373-020-02137-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計8件（うち招待講演 0件 / うち国際学会 0件）

1. 発表者名 鈴木有祐
2. 発表標題 Partially broken orientations of Eulerian graphs on closed surfaces
3. 学会等名 Japanese Conference on Combinatorics and its Applications 2022 ( 離散数学とその応用研究集会 2022 )
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 鈴木有祐
2. 発表標題 閉曲面上のEulerian graph のpartially broken orientation について
3. 学会等名 第34回位相幾何学的グラフ理論研究集会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 増田充恭
2. 発表標題 最適1-平面グラフが含む $K_n$ のマイナー及び細分について
3. 学会等名 第34回位 相幾何学的グラフ理論研究集会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 小泉昌平
2. 発表標題 射影平面の最適1-交差埋め込みのマッチング拡張可能性
3. 学会等名 第34回位相 幾何学的グラフ理論研究集会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 増田充恭
2. 発表標題 最適1-平面グラフが含む $K_n$ のマイナー及び細分について
3. 学会等名 第19回組合わせ論若手研究集会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 小泉昌平
2. 発表標題 射影平面の最適1-交差埋め込みのマッチング拡張可能性
3. 学会等名 第19回組合わせ論若手研究集会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 鈴木有祐
2. 発表標題 四角形分割における頂点数の増減のある局所変形問題について
3. 学会等名 第33回位相幾何学的グラフ理論研究集会（横浜国立大学）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 増田充恭
2. 発表標題 $K_n$ の細分を持つ多重最適1-平面グラフについて
3. 学会等名 第18回組合せ論若手研究集会（慶應大学矢上キャンパス，オンラインによる発表）
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

YUSUKE SUZUKI (鈴木 有祐)  
<http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~y-suzuki/>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------