

令和 6 年 4 月 24 日現在

機関番号：17401

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2020～2023

課題番号：20K03719

研究課題名（和文）アダマール行列の存在問題の解決に向けた構成的研究

研究課題名（英文）Constructive research towards solving the existence problem on Hadamard matrices

研究代表者

初原 幸二（Momihara, Koji）

熊本大学・大学院先端科学研究部（理）・准教授

研究者番号：70613305

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,900,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では、有限射影空間の2-交差集合を用いたアダマール行列の既存の幾何学的構成法の一般化、強正則グラフやアソシエーションスキームを用いた新たな構成法の開発を行い、未知なる次数のアダマール行列を構成する理論を確立することが目的であった。

本研究で、有限群の作用と有限体上の冪乗剰余を用いた幾何構造を構成する手法を開発し、また、超平面交差数の計算のためガウス和・ガウス周期の新たな特徴づけを行った。特に、新たなアダマール行列を含む系列の発見、アダマール行列に関連する強正則グラフやアソシエーションスキームの構成を行い、アダマール行列及び関連する組合せ構造の存在問題を進展させた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

アダマール行列は、符号・デザイン・グラフ・格子等の構成に用いられる重要な離散構造であり、新たなアダマール行列や関連する組合せ構造の発見が、これらの分野における様々な問題を解決する可能性もあり、多くの付加的成果を生み出すという点で本研究成果には重要な意義がある。また、有限幾何やガウス和をはじめとする整数論における研究成果は、組合せ論における様々な構造の存在証明に応用できる潜在的可能性もあり、重要な価値がある。更には、アダマール行列は、統計における分散分析・情報通信における周波数信号処理等、情報科学分野に多くの応用があるため、幅広く社会に貢献することが期待される。

研究成果の概要（英文）：The objective of this research project is to build a theory for generating new Hadamard matrices by generalizing known geometric constructions of Hadamard matrices using two-intersection sets in finite projective spaces and by giving new constructions of Hadamard matrices based strongly regular graphs and association schemes.

In this research, we found new methods to construct geometric objects using actions of finite groups and power residues of finite fields and gave new characterizations for Gauss sums and Gauss periods to compute hyperplane sections. In particular, we succeeded to find families of new Hadamard matrices. Furthermore, we proposed new constructions of strongly regular graphs and association schemes related to Hadamard matrices. Thus, we developed the existence theory of Hadamard matrices and related combinatorial objects.

研究分野：組合せ論

キーワード：アダマール行列 有限幾何 2-交差集合 差集合族 ガウス和 強正則グラフ アソシエーションスキーム

1. 研究開始当初の背景

「任意の2行が直交する(1, -1)-正方行列」であるアダマール行列は、符号・デザイン・グラフ・格子等の構成に用いられる極めて重要な離散構造である。これまで数多くの「発見・構成」に関する論文が発表されたが、『全ての自然数 n に対し、 $4n$ 次アダマール行列は存在するのか?』という問題は、組合せ数学分野で大きな未解決問題として残されてきた。

「行和が一定」の均整アダマール行列は、それ自身が Fisher 不等式の等号を満たす組合せデザインであり、有限幾何学との相性も良く扱いやすい。最も広範囲の次数を被覆する結果として、Chen (1997)は、2-交差集合と呼ばれる、「3次元有限射影空間で、超平面らと2種類の交差数を持つ点集合」の発見を通して、『 $4n^4$ 次均整アダマール行列の存在性』を肯定的に解決している。

問題点: Chen の理論の高次元版は未だ確立されておらず一般の奇数 $2d+1$ 次元に拡張されれば、『 $4n^{2d+2}$ 次アダマール行列の存在性』が解決する。また、低次元の場合にも、他の次数の均整アダマール行列を生成する幾何構造の例と系列が発見されている。しかし、「群作用による軌道分解から軌道を選ぶ」という古典的手法では軌道数が多くなり、一般化/高次元化は困難であった。

これまでの研究で、群作用と高い指数のガウス和の計算理論を併用した、射影空間上の超平面交差数の計算法を考案してきたが、この手法は、自己同型群が比較的小さな幾何構造にも適用することが可能であったため、既存の例の一般化が可能であろうと考え、着想に至った。

均整アダマール行列は(4×平方数)次しか存在しえない。(4×非平方数)次アダマール行列は、デザインとの直接的な関連がないため、理論的に扱いづらく、存在問題の解決からほど遠い状況にあった。そこで、(4×非平方数)次に焦点を当てた新しい構成法の開発が求められていた。

Chen のアダマール行列には、強正則グラフやアソシエーションスキーム(AS)などの良いグラフ分解及び差集合族が付随しており、それを基に行列を分解・2倍に拡大・合成することで、『 $4(2n^4+1)$ 次アダマール行列の存在』を示すことに成功している(Leung-Momihara (2020))。これは、均整なものとは非均整なものとの間に、強正則グラフやASを通して、一般的に何らかの関係があることを示唆しており、強正則グラフやASを通じた新たな構成法の開発が期待された。

2. 研究の目的

研究背景から、以下の大きな2つの問いが想起される。

「群作用とガウス和の計算を組み合わせる手法」を発展・展開させることで、射影空間の2-交差集合を用いた均整アダマール行列の構成理論の高次元版を確立できるか。

「アソシエーションスキームやその一般化した構造に基づく均整アダマール行列の分解・拡大・合成を行う手法」を発展・展開させることで、(4×非平方数)次アダマール行列の構成理論を構築できるか。

そこで以下の事項を研究目的とした。

Chen の理論を高次元化し、有限幾何構造に基づく均整アダマール行列の構成法を確立することが目的であった。そのために、高次元の幾何構造を発見するための、群論的手法・整数論的手法・有限幾何的手法を開発すること、そして、高次の超平面交差数を計算するためのガウス和を含んだ指標和の計算手法を確立することを目標とした。

AS やその一般化した構造に基づく、(4×非平方数)次アダマール行列を組織的に構成する理論的な枠組みを作ることが目的であった。そのために、ASを通じ、均整アダマール行列と(4×非平方数)次アダマール行列の構造的関係性を明らかにすること、そして、均整アダマール行列の背後にある強正則グラフやASの存在性、構成法が適用可能な均整アダマール行列の存在性を明らかにすることを目標とした。

3. 研究の方法

以下の方法・流れで研究を実施した。

(1) 計算機によるアダマール行列を生成する差集合族の例の発見を行う。広範囲で探索を行うためのパラメータの制限や、指標値の計算のためのアルゴリズムを設計し、実装する。また、例の一般化のため、以下の手法・流れで研究を行う。

(2) 有限体に関する差集合族に関しては、その指標値の計算が必須である。特に、例の発見を広範囲に行えるようになり、また、一般化の際の証明にも使える。よって、高い指数のガウス和を含む指標和の整数論的計算手法を構築する。

(3) 有限アフィン空間または射影空間における良い幾何構造(特に 2-交差集合)が Chen の理論に用いられ、アダマール行列の構成に用いられた。よって、Chen の理論で用いられた 2-交差集合の一般化、新たな 2-交差集合の発見、および付随する有限体上の強正則グラフの存在性について研究を行う。

(4) 小さなアダマール行列の構造を分析し、扱いやすい自己同型群が内在している場合に、一般化可能か、差集合族で記述できるか、既存の符号に包含されるかを調べ、そのアダマール行列の構造を明らかにし、また、例の一般化を試みる。

(5) 既存の均整アダマール行列に付随する強正則グラフやアソシエーションスキームの特徴付け、一般化を行う。また、その一般化した構造を利用したアダマール行列の構成法の一般化を試みる。

4. 研究成果

2020 年度から 2023 年度の 4 年間に以下の研究成果を得た。

(2020 年度) Xia-Xia(2003)が発見した差集合族の無限系列について、その差分の性質を計算機を併用し明らかにすることで、その差集合族を 2 倍に拡大できることを示した。これにより、ある特別な素数 q に対し、 $4(2q^2+1)$ 位数の新たなアダマール行列の存在性を証明することに成功した。新たな位数でのアダマール行列の存在性の証明は、この研究分野では非常に難しいとされてきたことを鑑み、今回の研究成果は価値のあるものであると言える。この結果は、共著の論文として国際学術誌に採択された(Discrete Mathematics、344 巻、2021 年)。

また、歪対称アダマール行列を生成する差集合の存在性について、存在しうる群は基本可換群であるという予想があるが、基本可換群でない群の上で差集合が存在すれば、そのような例は無数存在することを証明し、長年の予想を大きく進展させることができた。この結果は、単著の論文として国際学術誌に採択された(Electronic Journal of Combinatorics、27 巻、2020 年)。

(2021 年度) Turyn(1984)、Chen(1997)、Polhill(2010)による Paley 型のアダマール行列の合成的構成法が、強正則グラフの構成法として一般化可能であることを証明し、非常に大きなラテン方格型/非ラテン方格型の強正則グラフの無限系列を発見することに成功した。その研究成果について、単著の論文として国際学術誌に採択された(Journal of Combinatorial Theory, Series A、184 巻、2021 年)。また、アダマール行列の国際研究集会でも招待講演を行った(The 6-th International Workshop on Algebraic Designs, Hadamard Matrices & Quanta、2022 年 7 月)。

また、良く知られた平方剰余を用いた歪みアダマール行列を構成する方法を、pure な Gauss 和の理論を用いて一般化することに成功した。また、pure な Gauss 和の新たな特徴づけを行った。この結果は、単著の論文として国際学術誌に採択された(Finite Fields and Their Applications、77 巻、2022 年)。

また、指数 2 型のガウス和はアダマール行列や強正則グラフの構成に用いられてきたが、その特徴づけの一般化として、ガウス和の冪がいつ 2 次体に入るかについて特徴づけを行い、Aoki(2004)による pure ガウス和の有限性に関する定理の類似を得ることができた。この結果は、共著の論文として国際学術誌に採択された(Journal of Number Theory、238 巻、2022 年)。

また、Bamberg-Lee-Momihara-Xiang(2018)による、Hermitian 曲面における Hemisystem の存在性から誘導される強正則グラフの存在性を、3 値のガウス周期の存在問題に帰着させ一般化を行った。この結果は、共著の論文として国際学術誌に採択された(Finite Fields and Their Applications、77 巻、2022 年)。

さらには、長年未解決であったあるパラメータの Cameron-Liebler line class と呼ばれる有限幾何構造の存在性について、本研究課題の主題である 2-交差集合の問題に帰着させ、解決することができた。この結果は、共著の論文として国際学術誌に採択された(Advances in Mathematics、385 巻、2021 年)。また、本研究内容について、国内研究集会での講演を行った(RIMS 共同研究「有限群論、代数的組合せ論、頂点代数の研究」、2022 年 12 月)。

(2022 年度) Xia-Xia(2003)や Leung-Schmidt-Ma(2006)によるアダマール行列を生成する 4 つのブロックからなる差集合族が発見されている。この 4 つのうちの 2 つのブロックを選び、その位数に関して条件を加えることで、2 つのブロックからなる「almost」差集合族が得られることを証明することに成功した。これにより、アダマール行列ではないものの、D-最適性を 80%

以上満たす新たな 2 元行列の存在性を示すことができた。アダマール行列の理論が一般の D -最適行列の構成問題にも応用可能であることを示唆し、今後の研究の新たな方向性を示唆するものである。この結果は、共著の論文として国際学術誌に採択された(*Linear Algebra and its Applications*, 654 巻, 2022 年)。

Nebe-Viller (2013)によって発見された 3 元自己双対符号の系列について、その符号が有限体の 4 乗剰余から得られるある差集合族から作られるアダマール行列によって生成されていることを証明した。また、符号の長さが 60 の場合に、重み 60 の符号語集合内にさらに非同型なアダマール行列が存在していることを確認した。この結果は、共著の論文として国際学術誌に採択された(*Designs, Codes and Cryptography*, 91 巻, 2023 年)。

標数 3 の有限アフィン空間上で定義されてきた組合せゲームを、一般のアフィン空間や射影空間・一般の組合せデザイン上で定義し、デザインとしての群構造の性質に着目し、先手/後手必勝法について新たな特徴づけを得ることができた。この結果は、共著の論文として国際学術誌に採択された(*Australasian Journal of Combinatorics*, 83 巻, 2022 年)。

(2023 年度) T. Fujisaki (2004)による pseudo-cyclic アソシエーションスキームを用いた強正則グラフの構成法の条件を弱め、一般化を行い、Hollmann-Xiang(2006)による pseudo-cyclic アソシエーションスキームがその条件を満たすことを証明した。これにより、新たな強正則グラフの無限族の存在性を証明した。この構成法では、基本となるアソシエーションスキームをうまく選べば、アダマール行列を生成する Paley 型強正則グラフも構成できる。この結果は、共著の論文として国際学術誌に採択された(*Graphs and Combinatorics*, 40 巻, 2024 年)。また、この内容で、国内研究会での講演および国際会議で招待講演を行った(スペクトラルグラフ理論および周辺領域(第 12 回研究会)、2024 年 1 月・2023 International Conference on Combinatorics and Finite Geometry, 2023 年 9 月)。

また、Wilson (1974)による有限体上の部分集合に生じる差の cyclotomy への均等分配に関する定理を、pseudo-cyclic アソシエーションスキームへ拡張し、pseudo-cyclic アソシエーションスキーム上の差集合の漸近存在性を証明した。この結果は、共著の論文として国際学術誌に採択された(*Discrete Mathematics*, 346 巻, 2023 年)。

本研究における研究は概ね順調に進み、特に新しい位数のアダマール行列の系列を発見できたことについては、当初の予定通りの成果を得られたと考えられる。また、アダマール行列に関係する有限幾何構造(特に 2-交差集合)や強正則グラフの無限族の存在性を数多く証明できた点、差集合族の指標値の計算のためのガウス和やガウス周期の新たな特徴づけ、アソシエーションスキームとの関係性について新たな結果を得られたことは、研究当初予想していた以上の成果であり、研究目的は概ね達せられたと考えられる。さらには、本研究の副産物として、アダマール行列から D -最適性の高い行列の系列を得られたことについて、アダマール行列と同等の存在性を証明できるのではないかという今後の研究の可能性を示唆するものであり、新たな研究の方向性を与えたという点で、他の研究者へのインパクトは大きいものと思われる。一方で、得られたアダマール行列の位数の範囲が研究開始当初期待していたものよりも小さかった点に関しては、今後の研究推進の余地があるものと考えられる。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計13件（うち査読付論文 12件 / うち国際共著 4件 / うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Kajiura Hiroki, Momihara Koji	4. 巻 346
2. 論文標題 Difference sets in pseudocyclic association schemes	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Discrete Mathematics	6. 最初と最後の頁 P.No.113598
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.disc.2023.113598	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Momihara Koji, Suda Sho	4. 巻 40
2. 論文標題 Strongly Regular Graphs from Pseudocyclic Association Schemes	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Graphs and Combinatorics	6. 最初と最後の頁 P.No.39
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00373-024-02764-x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 初原幸二	4. 巻 2253
2. 論文標題 The existence of Cameron-Liebler line classes with parameter $\frac{(q+1)^2}{3}$	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 京都大学数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 N. Matsumoto, K. Momihara, M. Nakamura	4. 巻 83
2. 論文標題 A note on avoidance games on Steiner triple systems	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Australasian Journal of Combinatorics	6. 最初と最後の頁 196-203
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 K. Momihara, S. Suda, Q. Xiang	4. 巻 654
2. 論文標題 Square (1,-1)-matrices with large determinants and near-Hadamard matrices	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Linear Algebra and its Applications	6. 最初と最後の頁 28-55
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.laa.2022.08.028	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 M. Araya, M. Harada, K. Momihara	4. 巻 91
2. 論文標題 Hadamard matrices related to a certain series of ternary self-dual codes	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Designs, Codes and Cryptography	6. 最初と最後の頁 795-805
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10623-022-01127-y	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Momihara Koji, Xiang Qing	4. 巻 77
2. 論文標題 Cyclic arcs of Singer type and strongly regular Cayley graphs over finite fields	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Finite Fields and Their Applications	6. 最初と最後の頁 P.No.101953
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.ffa.2021.101953	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Momihara Koji	4. 巻 77
2. 論文標題 Pure Gauss sums and skew Hadamard difference sets	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Finite Fields and Their Applications	6. 最初と最後の頁 P.No.101932
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.ffa.2021.101932	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Momihara Koji	4. 巻 184
2. 論文標題 New constructions of strongly regular Cayley graphs on abelian non p-groups	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Combinatorial Theory, Series A	6. 最初と最後の頁 P.No.105514
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jcta.2021.105514	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Feng Tao, Momihara Koji, Rodgers Morgan, Xiang Qing, Zou Hanlin	4. 巻 385
2. 論文標題 Cameron-Liebler line classes with parameter $x = \frac{(q+1)^2}{3}$	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Advances in Mathematics	6. 最初と最後の頁 P.No.107780
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.aim.2021.107780	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Momihara Koji	4. 巻 238
2. 論文標題 Powers of Gauss sums in quadratic fields	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Number Theory	6. 最初と最後の頁 331 - 352
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jnt.2021.08.015	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 K. H. Leung, K. Momihara, Q. Xiang,	4. 巻 344
2. 論文標題 A new family of Hadamard matrices of order $4(2p^2+1)$	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Discrete Mathematics	6. 最初と最後の頁 P.No.112163
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.disc.2020.112163	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 K. Momihara	4. 巻 27
2. 論文標題 A recursive construction for skew Hadamard difference sets	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 The Electronic Journal of Combinatorics	6. 最初と最後の頁 Paper No. 3.36
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.37236/9058	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -

[学会発表] 計3件(うち招待講演 2件/うち国際学会 1件)

1. 発表者名 初原幸二
2. 発表標題 The existence of Cameron-Liebler line classes with parameter $x = (q+1)^{2/3}$
3. 学会等名 京都大学RIMS共同研究(研究会)「有限群論, 代数的組合せ論, 頂点代数の研究」
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Koji Momihara
2. 発表標題 Partial difference sets of Latin square type or negative Latin square type in abelian non p-groups
3. 学会等名 The 6-th International Workshop on Algebraic Designs, Hadamard Matrices & Quanta (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 初原幸二
2. 発表標題 可換非p-群上のpartial difference setについて
3. 学会等名 第22回名古屋組合せ論セミナー(第9回 実験計画法とその周辺・オンラインセミナー)(招待講演)
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Homepage of Koji Momihara
<https://sites.google.com/view/kojimomihara/home>
Researchmap
<https://researchmap.jp/7000016996>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	丸田 辰哉 (Maruta Tatsuya) (80239152)	大阪公立大学・大学院理学研究科・教授 (24405)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
中国	南方科技大学			
中国	南方科技大学			
米国	University of Delaware	Department of Mathematics		
シンガポール	National University of Singapore	Division of Natural Science		