

令和 5 年 6 月 8 日現在

機関番号：17701

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2020～2022

課題番号：20K03721

研究課題名(和文) 関係の連続性

研究課題名(英文) Continuity of relations

研究代表者

古澤 仁 (Furusawa, Hitoshi)

鹿児島大学・理工学域理学系・教授

研究者番号：00357930

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：関係の連続性に関して、通常の数学において次のような成果を得た。(1) Weihrauchらの計算可能解析学において検討されている連続性と同値である2つの条件、(2) Bergeの上半連続性の一般化、これと同値である5つの条件および点列連続性と同値であるための十分条件
さらに、(1)で検討した連続性に関して、構成的解析学において次のような成果を得た。(3)通常の数学において同値である5つの条件は、各点連続と同値であるものと点列連続と同値であるものの2つのグループに大別できること、およびこれらが全て同値になるための十分条件

研究成果の学術的意義や社会的意義

関係は非決定的な振る舞いを数学的に取り扱うための最も基本的な道具である。関係の連続性の概念は分野ごとの利用目的に応じていくつも提案されてきているが、これらに関する一般の位相空間論的観点からの系統的な研究はほとんどなされてこなかった。本研究では関係の連続性の統一的で系統的な理解の初期段階を与えた。つまり、本研究の成果は位相空間の間の非決定性理論の基盤構築と位置づけられ、連続関係の概念を基礎とする数学の展開に繋がることが期待される。

研究成果の概要(英文)：The following results on continuity of relations are obtained in classical mathematics. (1) 2 equivalent conditions to the continuity which studied in Weihrauch's computable analysis; (2) a generalization of Berge's upper semicontinuity, 5 conditions which are equivalent to it, and a sufficient condition for it to be equivalent to sequential continuity
Also, in constructive analysis, the following results are obtained. (3) a fact that 5 classically equivalent conditions are divided into 2 groups: conditions equivalent to pointwise continuity and to sequential continuity, and a sufficient condition for all 5 conditions are equivalent

研究分野：数学基礎関連

キーワード：関係 位相 各点連続 点列連続 構成的数学

1. 研究開始当初の背景

2つの集合の直積の部分集合である(二項)関係は多価対応ともよばれ、関数(または写像)の一般化である一方、関数は全域かつ一価的な関係であり、関数は決定性を、関係は非決定性を取り扱うための数学的道具である。また、位相空間とその間の連続関数の概念は現代数学の様々な分野の基礎をなしている。

連続関係の定義は数理経済学や計算可能数学といった分野ごとの利用目的に応じていくつも提案されてきている。現在最もよく知られている連続関係の定義とそれに基づく理論は Berge によってまとめられ、数理経済学の理論的基礎をなしている。Weihrauch らの計算可能数学においては、Berge の連続性とは異なる連続性を導入し、計算と連続性との関連性に対する考察の中で連続関係を検討している。

構成的数学は数学的定理の計算可能性を明らかにする構成的証明のみを許容する体系であり、そのことから構成的数学は通常の数学の部分体系となる。そのため、通常の数学では同値だが、構成的には同値でない関数の連続性が知られている。例えば、距離空間の間の関数の(各点)連続性と点列連続性は通常の数学では同値だが、点列連続性が連続性を導くことを構成的には証明できない。石原は関数の連続性を機械的に洗い出し、分類する方法を提示した。

群上の決定的なセルオートマトンは遷移関数の連続性を用いて与えられることが知られており、研究代表者はこのことを踏まえて、計算可能数学で検討されている関係の連続性により非決定的なセルオートマトンを特徴づけた。当該研究をとおして、ここで用いた連続性の統一的理論の欠如による不便を実感し、その必要性を認識したため、関係の連続性について、一般的な位相空間論の観点から網羅的かつ系統的に調査し、連続関係の特定の目的によらない統一的で系統的な理論を構築すべきであるという考えに至った。

2. 研究の目的

本研究では、敢えて特定の目的によらず、中立的な観点から考えられる定義を形式的・機械的にすべて洗い出し、それぞれの分野に現れる連続性の概念を包含したより一般的な理論を構築することにより、関係の連続性の統一的で系統的理解を目指す。

研究全体をとおして、通常の数学と構成的数学の2つの立場から取り組む。構成的数学からの取り組みは通常の数学からの取り組みにより与えられる事実が構成的か非構成的かを明確にする。実際、その存在が構成的に証明できる関数は連続関数に限られる。よって、構成的数学において存在を証明できるか否かは、通常の数学の範疇で与えた関係の連続性の定義の適切さを判定するための1つの基準となる。また、構成的数学においては許容される存在や判定に対してその手続きの明示を求める。つまり、通常の数学の定理を構成的数学において証明するために追加される条件は手続き明示するために必要な条件ということになり、これらの条件は構成的数学での検討によってはじめて明らかになる。さらに、構成的数学は排中律などの論理的規則を持たない、通常の数学の部分体系であるため、この取り組みにより、一般性の高い理論の構築が可能になる。

位相空間とその間の連続関数の概念は現代数学の様々な分野の基礎をなしている。本研究の成果が連続関係の概念を基礎とする数学の展開の出発点となるとよう取り組む。

3. 研究の方法

次のような方法により考察を強化しながら新しい知見を獲得しつつ研究を遂行した。尚、2020年度および2021年度については、新型コロナウイルス感染症の流行により研究代表者と研究分担者の研究打合せはもっぱらオンラインで実施した。2022年度はオンラインと対面の両方を併用した。

2020年度

(1) 研究代表者は9月3日・4日の両日オンラインで開催された第31回代数、論理、幾何と情報科学研究集会(ALGI31)に参加し本研究課題に関連する情報収集および参加者との意見交換をおこなった。

(2) 研究分担者は9月8日から10日までオンラインで開催された日本応用数理学会2020年度年會に参加し本研究課題に関連する情報収集および参加者との意見交換をおこなった。

(3) 研究代表者は9月8日から10日までオンラインで開催された日本ソフトウェア科学会第37回大会に参加し本研究課題に関連する情報収集および参加者との意見交換をおこなった。

(4) 研究分担者は9月9日から11日までオンラインで開催された Seventeenth International Conference on Computability and Complexity in Analysis (CCA 2020) に参加し本研究課題に関連する情報収集を行った。

(5) 研究代表者は10月26日から29日までオンラインで開催された 18th Int. Conf. on Relational and Algebraic Methods in Computer Science (RAMiCS2020) に参加し本研究課題に関連する情報収集および参加者との意見交換をおこなった。

(6) 研究代表者は12月3日・4日の両日オンラインで開催された第37回記号論理と情報科学

研究集会 (SLACS2020) に参加し本研究課題に関連する情報収集および参加者との意見交換をおこなった。

2021 年度

(1) 文献 Claude Berge: Topological Spaces: including a treatment of multi-valued functions, vector spaces and convexity. Oliver and Boyd (1963) に引用されているフランス語で書かれた関係の連続性に関する歴史的な文献の英訳を入手し、必要に応じていつでも容易に内容の確認ができるよう準備した。

(2) 研究分担者は 5 月 22 日・23 日の両日オンラインで開催された日本科学史学会第 68 回年會に参加し本研究課題に関連する情報収集および参加者との意見交換をおこなった。

(3) 研究代表者および研究分担者は 8 月 10 日・11 日の両日オンラインで開催された第 38 回記号論理と情報科学研究集会 (SLACS2021) に参加し本研究課題に関連する情報収集および参加者との意見交換をおこなった。研究分担者は 2 日目の 11 日に「構成的解析学における関係の連続性」と題する講演をおこなった。

(4) 研究分担者は 9 月 1 日から 3 日までオンラインで開催された日本ソフトウェア科学会第 38 回大会に参加し本研究課題に関連する情報収集および参加者との意見交換をおこなった。

(5) 研究分担者は 9 月 5 日から 9 日までオンラインで開催された 2021 年度統計関連学会連合大会に参加し本研究課題に関連する情報収集および参加者との意見交換をおこなった。

(6) 研究分担者は 9 月 7 日から 9 日までオンラインで開催された日本応用数理学会 2021 年度年會に参加し本研究課題に関連する情報収集および参加者との意見交換をおこなった。

(7) 研究代表者は 9 月 9 日・10 日の両日オンラインで開催された第 32 回 代数, 論理, 幾何と情報科学研究集会 (ALGI32) に参加し本研究課題に関連する情報収集および参加者との意見交換をおこなった。

2022 年度

(1) 文献 Vasco Brattka and Perter Hertling: Continuity and computability of relation, Informatik berihite 164, Universitaet in Hagen, 1994 に引用されているフランス語で書かれた関係の連続性に関する歴史的な文献の英訳を入手し、必要に応じていつでも容易に内容の確認ができるよう準備した。

(2) 研究代表者と研究分担者は 8 月 9 日・10 日の両日鹿児島にて Berge の上半連続性の一般化に関する課題について議論した。

(3) 研究分担者は 12 月 3 日・4 日の両日名古屋大学東山キャンパスで開催された日本科学哲学会第 55 回(2022 年度)大会に参加し本研究課題に関連する情報収集および参加者との意見交換をおこなった。

(4) 研究代表者と研究分担者は 12 月 19 日鳥取にて Berge の上半連続性の一般化に関する課題について再び議論し、解決は不可能であろうと結論に至った。また、投稿中の論文の査読結果への対応方針を定めた。査読報告の中に文献情報が含まれていたが、この情報が本研究に有用であることを互いに確認し、この文献についても追加で検討することとした。

(5) 研究分担者は産業技術総合研究所の竹内泉氏を招へいし、関係の連続性の構成的理論がどこまで展開可能かを探るための構成的論理と実際の構成的証明に関する議論をおこなった。

(6) 研究分担者は金沢市で開催された数理論理学等の研究集会参加し、関係の連続性の理論展開の方針の検討とその周辺の状況を把握するための構成的数学の研究動向の調査および構成的数学の研究者との研究方法に関する議論をおこなった。

(7) 研究代表者と研究分担者は 3 月 27 日から 29 日まで鹿児島にて本研究の今後の展開について議論した。

4. 研究成果

次のような成果が得られた。尚、以下で引用する紀要論文とは、研究代表者と研究分担者が 2019 年に共同で執筆した論文 A note on continuity properties of relations (鹿児島大学理学部紀要第 52 号 pp1-6) のことである。この論文では、一般の位相空間論の立場から、Weihrachらの計算可能数学において検討された関係の連続性に関する 6 つの条件を与え、これらが通常の数学においては同値であることを示した。

(1) 紀要論文で検討した連続性と同値であるような条件を新たに 2 つ発見した。この 2 つは、それぞれ開核と閉包の逆像に関する包含関係である。

(2) Berge の上半連続性を、始域を考慮する形に一般化し、これと同値であるような 5 つの条件を与えた。紀要論文の場合とは異なり、閉包の像に関する包含関係で与えられる条件をどうしても与えられることができなかったが、これは上半連続性に対応する逆像の特殊な振る舞いによるものという考えに至った。(1) で述べた 2 つ条件は、この考察の過程で見つかったものである。一方で、紀要論文と同様に、ここでの連続性に対応するような点列連続性が考えられることおよびこれらが同値になるための条件を与えた。

(3) 紀要論文で与えた 6 つの条件のうち、点列連続性を含む 5 つの条件に着目し、これらについて構成的数学の立場から詳細に検討した結果、構成的数学においては同値性が崩れ、各点連続性に同値なものと、点列連続性に同値なものの 2 つのグループに大別されることがわかった。また、構成的数学においても 5 つが同値になるための十分条件を明らかにした。これらを主要な結果とする論文を執筆、投稿し、現在査読結果に基づいて改訂中である。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 1件 / うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Furusawa Hitoshi, Yoshida Satoru	4. 巻 54
2. 論文標題 A note on upper continuity properties of relations	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 鹿児島大学理学部紀要	6. 最初と最後の頁 1-7
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Berghammer Rudolf, Furusawa Hitoshi, Guttman Walter, Hoefner Peter	4. 巻 117
2. 論文標題 Relational characterisations of paths	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Logical and Algebraic Methods in Programming	6. 最初と最後の頁 1-19
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jlamp.2020.100590	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Nishizawa Koki, Yasuda Koji, Furusawa Hitoshi	4. 巻 12062
2. 論文標題 Preorders, Partial Semigroups, and Quantales	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Lecture Notes in Computer Science	6. 最初と最後の頁 237 ~ 252
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/978-3-030-43520-2_15	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計1件（うち招待講演 0件 / うち国際学会 0件）

1. 発表者名 吉田 聡
2. 発表標題 構成的解析学における関係の連続性
3. 学会等名 第38回記号論理と情報科学研究集会（SLACS2021）
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

研究（個人webページ）
<https://www.sci.kagoshima-u.ac.jp/furusawa/person/research.html>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	吉田 聡 (Yoshida Satoru) (00455437)	公立鳥取環境大学・人間形成教育センター・教授 (25101)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------