

令和 6 年 6 月 10 日現在

機関番号：17401

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2020～2023

課題番号：20K03733

研究課題名（和文）経路依存系における最適制御に関わる動的計画偏微分方程式の研究

研究課題名（英文）Studies of dynamic programming partial differential equations related to optimal control in path-dependent systems

研究代表者

貝瀬 秀裕（Kaise, Hidehiro）

熊本大学・大学院先端科学研究部（理）・教授

研究者番号：60377778

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,800,000円

研究成果の概要（和文）：最適制御は、時々刻々と変化する系の状態を与えられた基準に従って制御するための理論である。通常のお最適制御では、系の将来の状態は現在の状態のみで決定されるとするマルコフ性が仮定される。一方で、工学を始め様々な分野において、系の将来の状態が過去の状態にも依存する経路依存系が関心を集めている。本研究課題では、経路依存系における動的計画法、また、既存の枠組みでは収まらない系に対する動的計画法に関する結果を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

動的計画法は、主体者が系の状態をコントロールするための強力な手法である。マルコフ性を持つ系に対する動的計画法に関しては膨大な研究成果があり、様々な分野の問題を動機として今もなお多くの研究者により研究がなされているが、経路依存系に対する動的計画法の一般論の研究は少ない。本研究課題では、経路依存性を持つ系に関連する動的計画偏微分方程式の研究を行い、経路依存系における基準の最適値を求めるための基礎理論を築いた。また、複素空間を状態空間に持つ系に対する動的計画法を進展させた。

研究成果の概要（英文）：Optimal control is the theory to control time-varying states of systems under given criteria. In usual optimal control, it is assumed that systems have Markov property which means the future state of the system is determined by the current state. On the other hand, path-dependent systems where future states also depend on past states attract interests of researchers in various fields including engineering. In this research project, we obtained results on dynamic programming methods for path-dependent systems, also for systems which are not included in conventional frames of systems.

研究分野：最適制御

キーワード：最適制御 動的計画法 動的計画偏微分方程式 粘性解

1. 研究開始当初の背景

研究開始当初から現在に至るまで、系の未来の状態が過去の状態履歴に依るものとする経路依存系に対する制御理論の構築の重要性が高まっている。経路依存系の例としては、例えば工学における遅延系、数理ファイナンスにおける経路依存オプションなどはその典型である。また、非整数階微分を用いる非整数階微分方程式によるモデルは、過去の状態の影響を無視できない現象をより良く表現できるため、様々な分野で注目を集めている。

Bellman らにより開発された動的計画法はマルコフ的な系に対する最適制御に強力な手段を与えるが、経路依存系はマルコフ的でないため従来の動的計画法を直ちに適用できない。マルコフ性の欠如を回避するため、現在の状態に加えて過去の状態履歴を既知の状態変数とすることで、経路依存系において動的計画法の類似(経路依存動的計画法)を展開することができる。研究開始当初、このような観点から経路依存動的計画法に関する研究が、国外の研究者を中心ににわかに活発になっていた。先駆的な研究としては2010年前後に、共不変微分を用いた経路依存動的計画偏微分方程式の研究がロシアの研究グループにより開始されていた。また、研究開始の直前頃、Dupire の微分概念を動機とした後退確率微分方程式や非線形期待値を用いた研究が、フランスや中国の研究者により行われ始めていた。また、非整数階微分方程式やそれを一般化したVolterra 積分方程式で支配される系の最適制御における動的計画法の研究も、この頃に散見され始めた。

2. 研究の目的

最適制御では所与の基準を最適化することで、系の状態を制御することを試みる。したがって、基準の最適値である値関数と、最適値を実現する制御則(最適制御則)を求めることが基本的な問題となる。マルコフ的な系における最適制御では、値関数が満たす動的計画原理から導出される動的計画偏微分方程式が、上述の問題に対して重要な役割を果たす。経路依存系における最適制御においても、動的計画法の類似物である経路依存動的計画法が成立することから、動的計画偏微分方程式の類似物である経路依存動的計画偏微分方程式を形式的に導くことができる。しかしながら、この偏微分方程式は過去の状態経路からなる空間を定義域とするため、数学的に厳密な定式化が必要となる。本研究では、様々な経路依存系に対する経路依存偏微分方程式の研究と、それに対する動的計画的な手法を発展させることを主な目的とする。この目的にも通じるが、既存の動的計画法を用いることが出来ない系に対する動的計画法を発展させることも目標とする。

3. 研究の方法

マルコフ的な系に対する通常の最適制御問題において値関数は微分できるとは限らないため、動的計画偏微分方程式は適当な弱解の枠組みで考える必要がある。最適制御における弱解の概念として、1980年代初頭にCrandall-Lionsにより提唱された粘性解が有用である。この有用性は、粘性解における滑らかな試験関数の果たす役割と、動的計画原理(非線形半群)およびその無限小版として導出される動的計画偏微分方程式(発展方程式)との親和性による。

この関係性に倣って、経路依存系の最適制御問題や微分ゲームにおける粘性解理論について研究する。経路依存系の最適制御問題における値関数は過去の状態経路の関数(値汎関数と呼ぶ)となるため、無限次元空間上の微分概念が必要である。共不変微分をこの無限次元空間上の微分概念に据え、値汎関数と経路依存動的計画偏微分方程式の関係を明らかにする。

通常の最適制御における基準は順序関係を持つ実数値関数として定義されるが、順序関係を持たない複素数値の基準に対する動的計画法の可能性も追求する。量子力学におけるSchrödinger方程式は、停留作用の原理から導出できる。作用の停留値は、最適制御の観点からは複素数値基準に対する停留制御問題における値関数と捉えられる。これを踏まえて、Schrödinger方程式を複素数値停留制御からアプローチする。

4. 研究成果

(1) 複素数値拡散過程の停留値制御による Schrödinger 方程式の研究

Schrödinger 方程式の解に対して対数変換を施すと、空間変数の 1 階微分に関して非線形性を持つ非線形偏微分方程式を導くことができる。この非線形偏微分方程式は、停留値制御の値関数が満たす停留動的計画偏微分方程式とみなすことができる。このことより、Schrödinger 方程式を制御理論の手法により研究することが可能となる。

本研究では、クーロンポテンシャルを典型例とする特異ポテンシャル関数を持つ Schrödinger 方程式について、その解の停留値制御による確率的表現を与えるための確率論的基礎研究を行った。まず、ユークリッド空間上で定義されているポテンシャル関数を複素数ベクトル空間に拡張し、Schrödinger 方程式を複素数ベクトル空間上で考える。すると、Schrödinger 方程式を対数変換して得られる非線形偏微分方程式は、複素数ベクトル空間上の拡散過程に対する停留値制御における値関数が満たす停留動的計画偏微分方程式とみなせる。この値関数に対する検証定理を根拠に、停留値を達成するフィードバック制御により駆動される複素拡散過程を詳細に調べた。ポテンシャル関数の特異性に由来する特異点集合に、特異ドリフトを持つフィードバック拡散過程が到達しないことを示した。このことにより、Schrödinger 方程式の解に対する停留値関数としての確率論的表現の実現に一步近づいた。

(2) 経路依存系における中間 Hamiltonian に対する Isaacs 偏微分方程式の研究

微分方程式により支配される系における 2 プレーヤー零和ゲームを微分ゲームという。微分ゲームにおける動的計画原理から Isaacs 偏微分方程式を導出することができるが、プレーヤー間で有する情報の非対称性に応じて Isaacs 偏微分方程式の非線形項は、min-max 型または max-min 型の形で表される。前者に対応する Isaacs 偏微分方程式は上側 Isaacs 偏微分方程式、後者は下側 Isaacs 偏微分方程式と呼ばれる。min-max 項と max-min 項が等しいとき、2 プレーヤーのゲーム値が一致し、ゲームが成立する。一方で、min-max 項と max-min 項に乖離があるとき、2 プレーヤー間でどのような意味でゲームが成立しているか意味づけることは重要な問題である。

本研究では、経路依存常微分方程式に対する微分ゲームにおいて、min-max 項と max-min 項の凸結合で表現される中間 Hamiltonian を持つ経路依存 Isaacs 偏微分方程式の研究を行った。まずは、中間 Hamiltonian を持つ経路依存 Isaacs 偏微分方程式の粘性解を、経路依存系の離散時間近似の極限を用いて構成した。次に、離散時間近似を離散時間ゲーム値として表現することに成功した。具体的には、各離散時刻におけるコイントスの結果に応じてプレーヤー間の情報の有利・不利を決定する離散時間ゲーム値を定義し、このゲーム値が離散時間近似に一致することを示した。この研究成果により、min-max 項と max-min 項が一致しない場合でも、プレーヤー間の情報を適切に定式化すればゲームが成立することが明らかになった。連続時間の微分ゲームに対しても同様なことが期待できる。

(3) Caputo 微分方程式により支配される系に関連する Hamilton-Jacobi 偏微分方程式の研究

通常微分を非整数階微分で置き換えた非整数階常微分方程式により支配される系は、非整数階微分が過去の状態経路に依存するため経路依存系である。Caputo 微分は非整数階微分概念の 1 つで、Caputo 微分方程式は自然な初期条件を与えるため、多くの分野における現象を記述するモデルとして使われている。一方で、Caputo 微分方程式の最適制御に対する動的計画法の研究は少なく、その研究は喫緊の課題である。

本研究では、Caputo 微分方程式で支配される系の最適制御問題における Hamilton-Jacobi-Bellman 偏微分方程式や微分ゲームにおける Isaacs 偏微分方程式を含む Hamilton-Jacobi 偏微分方程式に対する粘性解理論の研究を行った。詳しくは、まず、Caputo 微分方程式に支配される系における最適制御問題における共不変微分概念に基づいた粘性解の概念を、指導する大学院学生と提唱した。次に、この粘性解の概念の枠組みで、Hamilton-Jacobi 偏微分方程式に対して、粘性解の比較定理が成立することを示した。これにより、一定の条件の下ではあるが、値汎関数を動的計画偏微分方程式の一意的な粘性解として特徴づけることが可能になった。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 H. Kaise	4. 巻 86
2. 論文標題 Convergence of discrete-time deterministic games to path-dependent Isaacs partial differential equations with quadratically growing Hamiltonians	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Applied Mathematics & Optimization	6. 最初と最後の頁 1-49
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00245-022-09829-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 P.M. Dower, H. Kaise, W.M. McEneaney, T. Wang, R. Zhao	4. 巻 21
2. 論文標題 Solution existence and uniqueness for degenerate SDEs with application to Schrodinger-equation representations	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Communications in Information and Systems	6. 最初と最後の頁 297-315
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4310/CIS.2021.v21.n2.a6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 W.M. McEneaney, H. Kaise, P.M. Dower, R. Zhao	4. 巻 1
2. 論文標題 Strong solution existence for a class of degenerate stochastic differential equations	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Proceedings of 21st IFAC World Congress	6. 最初と最後の頁 1-5
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計5件（うち招待講演 2件/うち国際学会 4件）

1. 発表者名 H. Kaise
2. 発表標題 Comparison theorems for viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations with co-invariant derivatives of fractional orders
3. 学会等名 The Eleventh Meeting on Probability and PDE（招待講演）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 H. Kaise
2. 発表標題 Comparison Theorems for Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi Equations with Co-Invariant Derivatives of Fractional Orders
3. 学会等名 SIAM Conference on Control and Its Applications (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 H. Kaise and D. Hernandez-Hernandez
2. 発表標題 Zero-sum games intermediate Hamiltonian in path-dependent deterministic systems
3. 学会等名 International Conference "Optimal Control Theory and Applications" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 H. Kaise
2. 発表標題 Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman PDEs for fractional-order systems
3. 学会等名 SIAM Conference on Control and its Applications (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 H. Kaise
2. 発表標題 Partially observed H-infinity control for discrete-time path-dependent systems: A small noise limit of risk-sensitive stochastic control
3. 学会等名 The 53rd ISCIE International Symposium on Stochastic Systems Theory and its Applications (国際学会)
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------