

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 6 年 6 月 22 日現在

機関番号：23901

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2020～2023

課題番号：20K03736

研究課題名(和文) 球面デザイン，およびその近似デザインの構成法に関する研究

研究課題名(英文) Research on constructions of spherical designs and its approximate designs

研究代表者

平尾 将剛 (Hirao, Masatake)

愛知県立大学・情報科学部・准教授

研究者番号：90624073

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：球面デザイン，およびその近似デザインについて研究・考察を行なった．行列式点過程を中心に考察を行い，いくつかの球面上の確率点過程はフレーム・ポテンシャルの観点から近似デザインを生成することを示した．また，球面デザインについては，群軌道を用いた構成法のさらなる改良や，格子の殻からなる点配置の調和指数デザインについての特徴づけを与えることに成功した．

研究成果の学術的意義や社会的意義

Bondarenkoらによる球面デザインの存在性に関するKorevaarとMeyersの予想の解決以降，球面デザインの研究はその存在問題から具体的に構成し，それを数値解析のみならず統計学や機械学習に応用することに変化してきている．本研究で示した(1) いくつかの球面上の確率点過程が近似的に球面デザインをなすこと，さらには(2) 球面デザインの構成の改良やデザインの持つ性質の調査に進展を与えたことは，今後の構成法解決へ向けて重要であり，今後の研究が広く期待されるものである．

研究成果の概要(英文)：We have studied and considered spherical designs and their approximation designs. We have focused on determinantal point processes and shown that some stochastic point processes on the sphere can generate approximation designs from the viewpoint of frame potentials. We have also succeeded in further improving the construction methods using group orbits in spherical designs and in providing a characterization of harmonic-index designs of point configurations consisting of lattice shells.

研究分野：数学

キーワード：球面デザイン 行列式点過程 球面上の点配置 調和指数デザイン 球面上のcubature 格子

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

球面デザインの存在問題に関する初期の代表的な結果として、1980年代半ばの Seymour と Zaslavsky の結果が挙げられる。彼らは自然数のペア (d, t) を固定したとき、点数が「十分大」ならば、 S^d 上の球面 t -デザインがいつでも存在することを示している。しかしながら、彼らの主張自体は必要点数の大きさには言及されておらず、具体的な点の大きさについて予想が立てられたのは Korevaar-Meyers(1993) によってである。Korevaar と Meyers はポテンシャル論的な観点から研究を行い、『(*) d を固定し、 t を大きくするとき、 S^d 上の球面 t -デザインで点数が $N = O(t^d)$ となるものが常に存在する』ことを予想したのである。

Korevaar と Meyers の予想は、Hardin と Sloane を筆頭に多くの研究者により特に $2S$ 球面 S^2 において、計算機探索が行われ肯定的に支持されてきた。3次元以上の一般次元について予想に関する研究の終止符を打ったのが Bondarenko et al.(2013) である。

Bondarenko et al.(2013)以降 (実際に彼らの結果が公表されたのは 2011 年)、(*)を達成する球面デザインの系列の存在を基にした応用研究も数多く生じている。しかしながら、Seymour と Zaslavsky の結果にしる、Bondarenko らの結果にしる、(*)を満たす球面デザインの存在性は保証するものの具体的な構成法に関しては、彼らの結果は何ら情報を与えてくれない。また、球面デザインの既存の構成法の研究は、特に(*)の状況とは異なり、 t を固定した場合 (特に t が小さい場合) に、任意の d に対して S^d 上の球面 t -デザインの構成法を与えることが目的となっているものがほとんどであり、要請に応えるような構成法では必ずしもない。そこで研究開始当初の重要なひとつ目の問いは次である。

問い (A) : d を固定し、 t を大きくするとき、 S^d 上の球面 t -デザインで点数が $N = O(t^d)$ となるものの具体的な構成法を与えることができるか？

また、(*)を満たす球面デザインの有用性は諸分野において確認することができる。例えば、Saff-Kuijlaars(1997)には 2次元球面 S^2 における種々の問題が、Brauchart-Grabner(2015)には d 次元球面 S^d における種々の問題が提示してある。その中でも近年、Brauchart et al.(2014) が、モンテカルロ数値積分や数理ファイナンスにおける株式のオプション計算などの応用を見据え、球面上の準モンテカルロ法とも呼ぶべき QMC デザイン理論を提唱している。特に(*)を満たす球面デザインの系列は、球面上の Sobolev 空間の元に対する数値積分に対して、“infinite strength” と呼ばれる極めてよい誤差の収束性を持つことを示し、数値計算を行う上での有効性が理論的に確かめられている。しかしながら、先に述べたように (*)を満たす球面デザインの構成法がないため、球面デザインより誤差の収束性に関してはるかに劣る球面デザインを「近似」する点配置 (近似デザイン) を用いた数値実験しか行っていないのが現状である。

ここで Brauchart らが行なった近似デザインの生成法について述べると、彼らはジッタード・サンプリング (球面を半径が小さい等面積領域に分割し、その分割された各領域上で一様分布に従い点配置を決める方法) により生成している。それ以外の近似デザインの生成法については、研究代表者が彼らの生成法に着想を得て先鞭をつけた行列式点過程と呼ばれる異なる点間に斥力が働く確率モデルを用いた生成法があるが、近年、こちらに関してさまざまな進展が見られる。

また、研究代表者は決定的に近似デザインを構成するアイデアとともに、決定的方法と確率的方法を併せて用いる新たなアイデアを持っている状況であった。そこで研究開始当初の重要なふたつ目の問いは次である。

問い (B) : d を固定し、 t を大きくするとき、 S^d 上の球面 t -デザインで点数が $N = O(t^d)$ となるものの近似デザインの「確率的」または「決定的」な構成法を与えることができるか？

2. 研究の目的

前述したように既存の球面デザインの構成法に係る研究は「 t を固定した場合 (特に t が小さい場合)」を中心に扱っている。さらには近似デザインの構成法も十分に確立されているとは言えない状況である。そこで本研究の目的は、まずは「近似デザインの構成法」を段階的に開発することからはじめ、問い(B) そして、問い(A) に対する段階的進展を与えることである。

研究代表者はこれまでに行列式点過程と呼ばれる確率モデルに着目し、近似デザインの研究に関して先鞭をつけた。そこでこの手法を推し進めることや、代数 (群論、整数論) を用いた決定的手法を用いることで、新たな近似デザインの構成法を提案することを目指すことを目的とする。さらにはそれらの知見から球面デザイン自体の構成法を進展させることを目指す。

3. 研究の方法

本研究に際し、問題となるのは近似デザインをどのように評価するかである。例えば、Brauchart et al. (2014) では、準モンテカルロ法的に Sobolev 空間の元の積分値とその近似値との最悪誤差の収束レートによって評価している。また、近年、球面上点配置の「良さ」を測るのに各種のポテンシャル・エネルギーを基準にすることが多い。特に滑らかさが $d/2 < s < d/2 + 1$ となる Sobolev 空間の最悪誤差はリース・ポテンシャル・エネルギーと一致していることも知られている。そこで本研究では代表的なフレーム・ポテンシャル・エネルギー、すなわち、点間の内積（または、距離）に依存したポテンシャル・エネルギーを用いて近似デザインの評価を行うことを検討した。また、デザインの構成については 1960 年代初頭の Sobolev の研究にまでさかのぼることができる群軌道を用いた構成法に再び焦点を当てることにした。群軌道を用いた構成法のひとつの欠点は、 d が大きくなったときに構成点数が非常に大きくなってしまふことである。それを緩和するために Victor (2004)、または Kuperberg (2006) では、群軌道を用いて構成した球面デザインを組合せ t -デザイン、直交配列などの組合せ構造を用いて点数を削減する方法が提案されている。この方法により、 t を小さいものに固定し、 d を大きくするとき、球面デザインを構成する点数の下界が漸近的に最適になるものが存在することが知られている。しかし、一方で組合せ t -デザイン、直交配列の存在性はパラメータに大きく依存する。そこでこれら組合せ構造自体の近似構造を確率的に構成して点数削減に用いることができないか調査することも副題とした。

4. 研究成果

論文[3]において、Hirao et al. (2014) および Sawa-Hirao (2017) において地球上の最適実験計画法を構成する際に提案した有限既約鏡映群の軌道を用いた球面デザインの構成法（コーナーベクトル法）を拡張した。従来法においては、 B 型群、もしくは D 型群のみに着目し、その群軌道から球面デザインが構成するための代数方程式を与えることに留まっていたが、両者を同時に扱う枠組みとして、ハイブリッド・コーナーベクトル法を提案した。さらにハイブリッド・コーナーベクトル法においても構成される球面デザインの点数はそのままでは巨大なものとなるため、Victor (2004)、Kuperberg (2005) の流れを組む、組み合わせ構造を用いた点数削減法をこの方法に対して整備した。これにより、既存の実験計画法で使われている種々のデザインをこの枠組みで再定式化、および、既知の構成点数 (Shatalov table) より少ない点数において構成可能な球面デザインを発見することができた。

さらに Hirao et al. (2014) など扱った B 型の有限既約鏡映群のコーナーベクトル、および、その内分点集合を用いた球面上の重み付きデザインに対する「強さ」の上界に対する考察を行った。ヒルベルト恒等式や Yuan Xu による単体上の cubature 公式へ帰着させる方法に加え、新たな比較手法を導入することにより、 a を 1 ではない正の実数であるとしたとき、コーナーベクトルおよび、 $(a, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ 型のベクトル複数個の B 型群軌道から得られるデザインの強さの限界は、3 次元以上の超球面においては 15 以下であることを示すことを成功した。これらのことは継続して議論しており、今後、論文としてまとめる予定である。

論文[1]において、近似デザインを見つける際に重要となるだろう球面上の確率点過程として行列式点過程、特に (i) 球面アンサンプル、(ii) 調和アンサンプル、(iii) ジッタードサンプリングに着目し、 p -フレーム・ポテンシャルの上からの評価を完成させた。特に球面アンサンプルに対しては、 p -フレームポテンシャルの具体的な表現を与えることに成功し、調和アンサンプルにおいては漸近評価を与えている。これにより、点数が多い場合は球面上のポアソン点過程より、行列式点過程の方が finite unit norm tight frames に近い構造（2-デザインの近似構造）であると結論付けることができた。

さらに論文[2]において、これまでは近似デザインを古典的な球面上の行列式点過程（球面アンサンプル、調和アンサンプルなど）に着目してきたが、論文[4]では新たに Beltrán and Etayo (2018, 2019) によって近年提案された新たな点過程（偶数次元球面における「一般化」球面アンサンプルと奇数次元球面における射影アンサンプルから誘導される点過程）に着目し、 p -フレーム・ポテンシャルの観点からの研究を行なった。この奇数次元における点過程に対しては、これまでと同様に p -フレーム・ポテンシャルの具体的な表現を与えることに成功し、また、偶数次元における一般化球面調和アンサンプルに対しては上からの評価を与えている。これによりジッタード・サンプリング点過程を除き、特に奇数次元球面に対しては、Beltrán と Etayo が与えた奇数次元球面上の点過程が、そして、偶数次元球面に対しては調和アンサンプルが近似デザインを確率的に与えると期待できる。

さらにこれらの関連研究としてハミング・グラフ, ジョンソン・グラフなどのアソシエーション・スキームと呼ばれる代数構造上のランダム点過程から得られる点配置と組合せデザイン, 直交配列などの古典的組合せ構造の「近さ」の評価を行った。これにより, アソシエーション・スキーム上で一様に独立で点集合を選んでくるよりは, 行列式点過程を用いた方がより古典的組合せ構造に「近い」構造が期待値として得られることを確認した。このことは継続して議論しており, 今後, 論文としてまとめる予定である。

論文[5]では, 球面デザインを一般化した概念である「調和指数デザイン」の観点から D_4 格子のシェルの研究を行なった。球面デザインを一般化した概念である「調和指数デザイン」の観点から D_4 格子のシェルの研究を行なった。 D_4 型ルートシステム(正 24 胞体の頂点配置)は, 一意的な tight antipodal $\{10, 4, 2\}$ -design on S^3 であることを示し, このことから D_4 ルート系の直交変換による D_4 格子のシェルの分解, および, 素数 $p > 5, p+1 \equiv 0 \pmod{5}$ に対して, D_4 型ルート格子の $2p$ シェルは 6-design とならないこと(Lehmer 予想の類似)を論文としてまとめた。さらに後続研究として今回の正 24 胞体の頂点配置, D_4 型ルートシステムとその双対からなる 48 点配置, 正 600 胞体の頂点配置を有限四元数群から捉え直し, 線形計画限界などいくつかの結果を得ている。これらに関して, 今後, 学会発表および, 論文としてまとめるため, 現在準備を行なっている段階である。

- [1] M. Hirao, Finite Frames, frame potentials and determinantal point processes on the sphere, *Statist. Probab. Lett.*, 176C, (2021), 109129
- [2] M. Hirao, On p -frame potentials of determinantal point processes on the sphere, *JSIAM Lett.*, 13, (2021), 21-24
- [3] M. Sawa, M. Hirao, K. Ito, Geometric designs and rotatable designs I, *Graphs Comb.*, 37, (2021), 1605-1651
- [4] M. Hirao, On p -frame potentials of the Beltrán and Etayo point processes on the sphere, *JSIAM Lett.*, 15, (2023), 1-4
- [5] M. Hirao, H. Nozaki, K. Tasaka, Spherical designs and modular forms of the D_4 lattice, *Res. Number Theory*, 9, (2023), 77

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Hirao Masatake, Nozaki Hiroshi, Tasaka Koji	4. 巻 9
2. 論文標題 Spherical designs and modular forms of the SD_4 lattice	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Research in Number Theory	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s40993-023-00479-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Hirao Masatake	4. 巻 15
2. 論文標題 On p-frame potentials of the Beltran and Etayo point processes on the sphere	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 JSIAM Letters	6. 最初と最後の頁 1~4
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.14495/jsiaml.15.1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Sawa Masanori, Hirao Masatake, Ito Kanami	4. 巻 -
2. 論文標題 Geometric Designs and Rotatable Designs I	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Graphs and Combinatorics	6. 最初と最後の頁 1605 ~ 1651
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00373-021-02274-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Hirao Masatake	4. 巻 176
2. 論文標題 Finite frames, frame potentials and determinantal point processes on the sphere	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Statistics & Probability Letters	6. 最初と最後の頁 109129 ~ 109129
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.spl.2021.109129	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hirao Masatake	4. 巻 13
2. 論文標題 On p-frame potentials of determinantal point processes on the sphere	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 JSIAM Letters	6. 最初と最後の頁 21~24
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.14495/jsiaml.13.21	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -

[学会発表] 計12件(うち招待講演 0件/うち国際学会 1件)

1. 発表者名 平尾 将剛,野崎 寛,田坂 浩二
2. 発表標題 Spherical designs and modular forms of the D4 lattice
3. 学会等名 日本数学会2023年度秋季総合分科会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 谷野 憲司,澤 正憲,平尾 将剛
2. 発表標題 B型鏡映群不変なある球面デザインの強さの評価について
3. 学会等名 日本数学会2023年度秋季総合分科会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 谷野 憲司,平尾 将剛,澤 正憲
2. 発表標題 B型鏡映群不変な球面デザインの単体的特徴付けとHilbert恒等式
3. 学会等名 2023年度応用数学合同研究集会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Masatake Hirao
2. 発表標題 Spherical designs and the D4 lattice
3. 学会等名 The 45th Australasian Combinatorics Conference: 45ACC (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 谷野 憲司, 平尾 将剛, 澤 正憲
2. 発表標題 B型鏡映群不変な球面デザインの単体的特徴付けとHilbert 恒等式
3. 学会等名 日本数学会2024年度年会
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 平尾 将剛, 小島壮史, 橋本倫太郎, 三浦琉雅, 澤正憲
2. 発表標題 整凸多面体に対するデザイン論的特徴付けについて
3. 学会等名 日本応用数理学会 第19回 研究部会連合発表会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 平尾 将剛
2. 発表標題 On random point configurations on Q-polynomial schemes
3. 学会等名 日本応用数理学会2021 年度年会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 平尾 将剛
2. 発表標題 On random point configurations on Q -polynomial schemes
3. 学会等名 日本数学会2021 年度秋季総合分科会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 平尾 将剛
2. 発表標題 On p -frame potential of the Beltran and Etayo point processes on the sphere
3. 学会等名 日本応用数理学会第18 回研究部会連合発表会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 平尾 将剛
2. 発表標題 On p -frame potential of the Beltran and Etayo point processes on the sphere
3. 学会等名 日本数学会2022年度年会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 平尾 将剛
2. 発表標題 Hybrid corner vector methods for constructing weighted spherical designs and its application
3. 学会等名 JCCA-2020 (離散数学とその応用研究集会2020・スペクトラルグラフ理論および周辺領域 第9回研究集会 共催)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 平尾 将剛
2. 発表標題 On p-frame potentials of determinantal point processes on the sphere
3. 学会等名 日本応用数理学会 2020年度 年会
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------