様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　５ 年　６ 月 １４ 日現在

機関番号：３２６８９
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2020～2022
課題番号：２０Ｋ０３７４０

研究課題名（和文）Einstein方程式の構造保存型数値解法の構築

研究課題名（英文）Study of structure preserving method for Einstein equations

研究代表者

米田　元（Yoneda, Gen）

早稲田大学・理工学術院・教授

研究者番号：９０２７７８４８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,700,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では、拘束条件をもつ非線形双曲型偏微分方程式であるEinstein方程式に対し、拘束条件を保ちつつ数値計算を行う手法について研究をした。その成果として、拘束条件に対する精度(constraint's order of accuracy(COA))と発展方程式に対する精度(evolution's order of accuracy(EOA))の違いを明確にして、拘束条件付き発展方程式系の数値計算に新たな精度の評価基準を制定した。また、発展方程式に対してより高精度に計算ができる方程式系の提案と、実際に重力崩壊現象を行い高精度な数値結果を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義
発展方程式を扱う数値計算における精度は、一般には発展方程式の離散化の際の打ち切り誤差から生じる精度を指す。一方、拘束条件付き発展方程式の場合は、拘束条件から生じる精度も存在する。これまではこの区別があまり明確でなかった。今回、拘束条件に対する精度(constraint's order of accuracy(COA))と発展方程式に対する精度(evolution's order of accuracy(EOA))の違いを明確にしたことで、数値計算の精度についてのより正しい理解を促す結果となると考えている。

研究成果の概要（英文）：In this study, we investigated a numerical method that preserves the constraints of the Einstein equations, which are classified as the constrained nonlinear hyperbolic equations. As a result, we have established a evaluation criterion for the accuracy of constraint (constraint's order of accuracy(COA)), and have clarified the differences between COA and the accuracy of evolution equation (evolution's order of accuracy(EOA)). Furthermore, we proposed some formulations of the Einstein equations to make more stable simulations, and performed some high accuracy numerical results of the gravitational collapse simulations.

研究分野：相対性理論

キーワード：Einstein方程式　高精度数値計算　構造保存型数値計算　固有値解析

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

2015 年に実現した重力波の直接観測において、Einstein 方程式の解を数値計算によって解析する**数値相対論**は重要な役割を果たした（参考文献[1]）。Einstein 方程式は拘束条件付き非線形偏微分方程式であり、対称性をもつような時空を対象としない限り解析的にも数値的にも解くことが困難であることが知られている。そのため、重力波の数値計算を実現するまでに、様々な技法が用いられてきた。一方で、数値計算結果に対する誤差解析といった数値解の定量評価についてはあまり研究が行われていなかった。

数値誤差の主要因にあたる離散化誤差を減らす工夫については、部分的なものが行われていた（例えば、参考文献[2]）にすぎず、時空に対し非依存なケースといった統一的な場合についての成果はほとんど出ていなかった。そのため、より複雑な現象の調査に対して、より精度の高い数値結果を得られる手法が必要になると考えられていた。

本研究で主要に用いた手法である**構造保存型数値計算手法**、CAF については、研究開始当時までに手法が確立されていたものであった。構造保存型数値計算手法については、主に常微分方程式に対する高精度数値計算手法として研究が行われており、本研究対象である Einstein 方程式のような偏微分方程式に対しても、研究対象が広げられつつあった。また、拘束条件の時間発展方程式（**拘束伝播方程式**）の係数行列の固有値である CAF については、研究代表者により主に研究が進められていた（参考文献[3,4]）。

２．研究の目的

本研究の目的は Einstein 方程式に対する高精度な数値計算手法の確立である。その実現には、数値誤差の主要因となる離散化誤差を減少させることが必要不可欠となる。そこで、より具体的な目的は、離散化前の性質を保ったまま離散方程式を作る手法である構造保存型数値計算手法を適用し、Einstein 方程式において離散化誤差の生成を少なくする離散方程式を構築することである。

Einstein 方程式が拘束条件付き発展方程式のため、時間発展とともに拘束条件の破れが増大し、数値解が正しくないものになる可能性がある。連続のレベルでは、拘束伝播方程式から初期条件において拘束条件が満たされていれば、時間発展後も拘束条件が満たされることが判明している（参考文献[5]）。そのため、離散のレベルでこの性質が受け継がれていれば、数値計算における数値誤差の減少が期待できる。したがって、離散方程式において拘束伝播方程式を導出すること、それをもとにして数値誤差の少ない数値計算を行うことが主要な目的となる。

３．研究の方法

本研究においては、離散化誤差を減少させることを主要な目的としている。そのため、拘束条件とその拘束伝播方程式の解析が対象となる。そのために、主に次の２つの方法を用いた。

構造保存型数値計算手法

離散のレベルで拘束伝播方程式を導出するために、構造保存型数値計算手法の考えを用いて、離散方程式を導出する。構造保存型数値計算手法は、連続のレベルで持つ特徴を離散化の際に失わせずに離散方程式にもその特徴を引き継がせる。本研究では、具体的には拘束伝播方程式の形を、離散化後も実現するために本手法を用いる。現在の時刻における拘束条件の離散式と次の時刻における拘束条件の離散式の差を考え、それを発展変数に対する時刻の差の線形和で表現する。その後、発展変数の時刻の差で表現される部分に、発展方程式の離散式を代入し整理することで、拘束条件の線形和で表現するというプロセスで離散化された拘束伝播方程式を導出する。

CAF

拘束伝播方程式が拘束条件の線形和で表現される Einstein 方程式において、その係数行列の固有値から拘束条件の時間発展後の挙動を予測できる。この固有値のことを Constraint Amplification Factor（CAF）と呼び、以前の研究（参考文献[3,4]）により確立された手法であり、今回の研究でも積極的に用いた。

上記２つの手法に加え、実際に数値計算の誤差の違いを調べるためには、適切な計算例が必要である。そこで、実際に構築された適切な離散方程式を用いて数値計算を行い、数値誤差への影響を調べる必要がある。そのための計算例に、重力崩壊していく時空を用いる。これは、Einstein 方程式の数値計算対象が主に重力波の生成と伝播現象であり、重力崩壊のモデルが多く行われていたためである。この初期条件を対象として数値誤差の減少の効果を調査する。この初期条件については我々がこれまでに未着手であったため、まずは初期値構築を実施し、構造保存までは考慮しない数値計算結果を得ることとした。

４．研究成果

本研究では、主目的である構造保存型数値計算手法による適切な離散 Einstein 方程式の導出は完結しなかった。一方、Einstein 方程式の高精度な数値計算結果を得るために必要と思われる成果がいくつか得られた。その成果は大きく分けて、A) 拘束条件をもつ発展方程式に対する精度の基準の提案、B) Einstein 方程式において共変性をもつ発展方程式系の安定性解析とより安定な方程式系の提案、C) 重力崩壊現象に対する初期値構成と CAF を参考としたより安定な方程式系の提案、D)双曲型偏微分方程式に対する安定な数値計算を行うための離散化手法の成果、である。A) と D) の成果については、主目的である適切な離散 Einstein 方程式の導出の際に必要となる指標と考えられ、C) はその精度を実際に数値計算で確認する際に必要となると考えている。一方で、B) は現在重力波などの現実的な数値計算に実際に用いられる方程式系についての研究であるため、現在実施されている研究に向かった成果の一部となっている。

A)　Einstein 方程式に対して、適切に離散化された拘束伝播方程式を導出していく段階で、拘束伝播方程式の精度と発展方程式の精度について違いが生じることが判明した。実際、拘束条件付き時間発展方程式には、拘束伝播方程式にも発展方程式にも微分項が含まれ、これらをそれぞれどのように離散化するかによって、それぞれ別の数値精度を作ることがわかった。発展方程式から生じる数値精度は一般に考慮される精度を指す。一方で、拘束伝播方程式から生じる精度は新しい数値計算結果の評価基準に相当するものである。そのため、本研究においては発展方程式から生じる精度を evolution ’s order of accuracy(EOA)、拘束伝播方程式から生じる精度を constraint ’s order of accuracy(COA)と名づけ、それぞれについての違いを調べた（図１）。この結果として、EOA と COA は一致しないこと、COA を良くするには、発展方程式の離散項にパラメータを入れるなどの工夫が必要であることがわかった（発表論文[1]）。今後はこの成果をより具体的なケースに適用していく予定である。

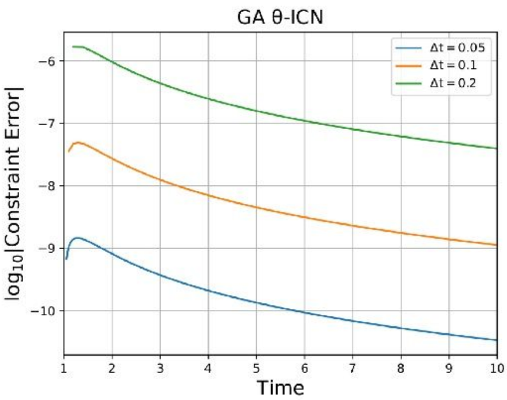

図１：横軸が時間、縦軸が数値誤差を表す（発表論文[1]）。

B)　Einstein 方程式に対して、重力波の数値計算の際に頻繁に用いられる BSSN 形式は、共変性でないため発展変数が物理量としてみなせない。そこで、共変性を持つ BSSN 形式（cBSSN 形式）の研究が行われてきている。本研究では、まず cBSSN 形式に対して CAF を求め、その数値安定性を調べた。その結果、cBSSN 形式は BSSN 形式よりも安定性が悪いことが判明した。そこで、CAF の結果を利用して、２つのブラックホール時空（Schwarzschild 時空、Kerr 時空）に対して、cBSSN 形式の安定性を調べ、さらに安定性を高めた方程式系を提案した。図２は Kerr 時空における安定性を調べた結果である。新たに提案した方程式系の結果（k=-0.7）がもともとの方程式系での結果（k=0）よりも安定であることがわかった（発表論文[2]）。今後は提案した方程式系に対する安定性を実際に数値計算により確認すること、適切な離散方程式の導出等の数値精度の向上を試みる予定である。

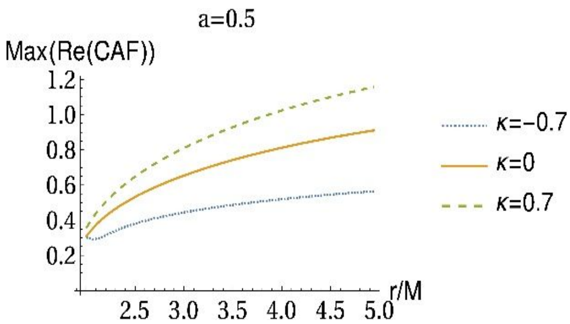

図２：横軸が中心からの距離を表し、縦軸が最大固有値の値を表す。縦軸の値は小さいほど安定であることを意味する（発表論文[2]）。

C)　構造保存型数値計算手法による適切な離散 Einstein 方程式の精度確認のため、数値計算例となる重力崩壊現象の初期値構築と、より安定な方程式系の提案を行った。この計算例では、完全流体を仮定し、物質場にダストを配置し重力崩壊させた。物質場の方程式に拘束条件を付加することで安定性を高めた方程式系を提案した。図３において、もともとの方程式系（k=0）は、修正された方程式系（k=-0.1）よりも数値エラーが大きい結果が得られた（発表論文[3]）。この数値計算には B）の成果を適用していないためにその適用を試みること、また A）の成果の適用を考えるなどが今後の課題として残っている。

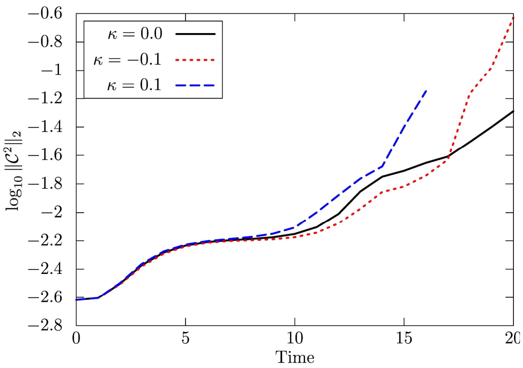

図３：横軸が時間、縦軸が数値誤差を表す（発表論文[3]）。

D)　相対論的双曲型偏微分方程式として、Klein-Gordon 方程式を用いて双曲型のもつ特徴とその数値計算に対する安定性を調べた。主に双曲型特有の Laplacian 項の離散化方法の適切性を調べた。これには、方程式系を正準形式とし、系の全 Hamiltonian の値が時間発展において変化しないような離散方程式を構築した。その際に Laplacian 項には２種類の離散表記が可能であることが判明した。その２種類は１階の中心差分表記の重ね掛けと前進差分と後退差分の積の離散表記である。この２種類を安定性の観点から調査したところ、１階の中心差分の重ね掛けは数値安定性が悪く、数値振動が起こりやすいこと、またその原因に離散化されたデータが偶数グリッドと奇数グリッドで情報のやり取りができなくなっていることがわかった（発表論文[4]）。この成果は双曲型の偏微分方程式であれば適用されると思われるため、Einstein 方程式においても同様の結果が生じると予測される。その確認を今後実施していく予定である。

参考文献
[1] B. P. Abbott *et al*, Phys. Rev. Lett. **116**, 61102 (2016).
[2] T. Tsuchiya and G. Yoneda, JSIAM Letters 9,7-60 (2017).
[3] G. Yoneda and H. Shinkai, Phys. Rev. D **63**, 124019 (2001).
[4] G. Yoneda and H. Shinkai, Phys. Rev. D **66**, 124003 (2002).
[5] S. Frittelli, Phys. Rev. D **55**, 5992-5996 (1997).

発表論文
[1] H. Hoshino, K. Satoh, and G. Yoneda, JSIAM Letters **13**, 13-16 (2021).
[2] T. Tsuchiya, R. Urakawa, and G. Yoneda, JSIAM Letters **14**, 84-87 (2022).
[3] R. Urakawa, T. Tsuchiya, and G. Yoneda, Class. Quantum Gravity **39**, 165002 (2022).
[4] T. Tsuchiya and M. Nakamura, JSIAM Letters **15**, 45-48 (2023).

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計4件（うち査読付論文　4件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　4件）

１．著者名 Hidetomo Hoshino, Kei Satoh, Gen Yoneda	４．巻 13
２．論文標題 Parametrized numerical scheme for the Einstein equations	５．発行年 2021年
３．雑誌名 JSIAM Letters	６．最初と最後の頁 13-16
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.14495/jsiaml.13.13	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

１．著者名 Takuya Tsuchiya, Ryosuke Urakawa, Gen Yoneda	４．巻 14
２．論文標題 Stable numerical simulation of Einstein equations in gravitational collapse space-time	５．発行年 2022年
３．雑誌名 JSIAM Letters	６．最初と最後の頁 84-87
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.14495/jsiaml.14.84	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

１．著者名 Ryosuke Urakawa, Takuya Tsuchiya, Gen Yoneda	４．巻 39
２．論文標題 On the stability of covariant BSSN formulation	５．発行年 2022年
３．雑誌名 Classical and Quantum Gravity	６．最初と最後の頁 165002
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1088/1361-6382/ac7e16	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

１．著者名 Takuya Tsuchiya, Makoto Nakamura	４．巻 15
２．論文標題 Numerical accuracy and stability of semilinear Klein--Gordon equation in de Sitter spacetime	５．発行年 2023年
３．雑誌名 JSIAM Letters	６．最初と最後の頁 45-48
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.14495/jsiaml.15.45	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

〔学会発表〕　計17件（うち招待講演　0件／うち国際学会　1件）

1．発表者名 星野秀朋，佐藤慧，米田元
2．発表標題 拘束条件に注目したEinstein方程式の離散スキームについて
3．学会等名 日本応用数理学会2020年度年会
4．発表年 2020年

1．発表者名 星野秀朋，佐藤慧，米田元
2．発表標題 Constraint Errorを抑えるためのEinstein方程式の離散スキームについて
3．学会等名 日本応用数理学会環瀬戸内応用数理研究部会第24回シンポジウム
4．発表年 2020年

1．発表者名 星野秀朋，佐藤慧，米田元
2．発表標題 Constraint Errorを抑えるためのEinstein方程式の離散スキームについて
3．学会等名 2020年度応用数学合同研究集会
4．発表年 2020年

1．発表者名 土屋拓也、浦川遼介、米田元
2．発表標題 重力崩壊する時空におけるEinstein方程式の高精度数値計算
3．学会等名 日本数学会2021年度年会
4．発表年 2021年

1．発表者名
Takuya Tsuchiya

2．発表標題
Numerical simulations of semi-linear Klein-Gordon equations in the de Sitter spacetime with structure preserving scheme

3．学会等名
13th International ISAAC Congress（国際学会）

4．発表年
2021年

1．発表者名
土屋 拓也

2．発表標題
有限要素法による双曲型偏微分方程式の構造保存数値計算

3．学会等名
日本応用数理学会2021年度年会

4．発表年
2021年

1．発表者名
星野秀朋，米田元

2．発表標題
拘束条件の保存性に着目したEinstein方程式の数値計算法

3．学会等名
日本応用数理学会2021年度年会

4．発表年
2021年

1．発表者名
土屋拓也，浦川遼介，米田元

2．発表標題
重力崩壊する時空におけるEinstein方程式の高精度数値計算

3．学会等名
日本応用数理学会2021年度年会

4．発表年
2021年

１．発表者名 土屋　拓也
２．発表標題 有限要素法による双曲型偏微分方程式の構造保存数値計算
３．学会等名 日本数学会2021年度秋季総合分科会
４．発表年 2021年

１．発表者名 星野秀朋，米田元
２．発表標題 Einstein方程式の拘束条件の保存性に着目した数値計算法について
３．学会等名 応用数理学会若手の会 第7回学生研究発表会
４．発表年 2022年

１．発表者名 土屋拓也，浦川遼介，米田元
２．発表標題 質量保存を考慮した重力崩壊する時空におけるEinstein方程式の数値計算
３．学会等名 日本数学会2022年度年会
４．発表年 2022年

１．発表者名 土屋拓也，浦川遼介，米田元
２．発表標題 質量保存を考慮した重力崩壊する時空におけるEinstein方程式の数値計算
３．学会等名 応用数学に関する研究発表会
４．発表年 2022年

１．発表者名
土屋拓也，中村誠

２．発表標題
De Sitter時空中における半線形Klein-Gordon方程式の高精度かつ安定な数値計算

３．学会等名
日本応用数理学会2022年度年会

４．発表年
2022年

１．発表者名
佐藤慧，星野秀朋，米田元

２．発表標題
Einstein 方程式の拘束条件の破れを抑えるような離散スキームについてinstein 方程式の数値計算のための拘束条件を用いた補正の最適化

３．学会等名
日本応用数理学会2022年度年会

４．発表年
2022年

１．発表者名
星野秀朋，土屋拓也，米田元

２．発表標題
Einstein 方程式の拘束条件の破れを抑えるような離散スキームについて

３．学会等名
日本応用数理学会2022年度年会

４．発表年
2022年

１．発表者名
土屋 拓也，中村 誠

２．発表標題
de Sitter 時空中における半線形 Klein-Gordon 方程式の精度と数値安定性について

３．学会等名
日本数学会2023年度年会

４．発表年
2022年

1．発表者名 土屋 拓也，中村 誠
2．発表標題 収縮する de Sitter 時空における半線形 Klein-Gordon 方程式の解の挙動 について
3．学会等名 日本数学会2023年度年会
4．発表年 2022年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
研究分担者	土屋　拓也 (Tsuchiya Takuya) (50632139)	八戸工業大学・基礎教育研究センター・准教授 (31103)	

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

8．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関