

令和 6 年 6 月 10 日現在

機関番号：13701

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2020～2023

課題番号：20K03745

研究課題名(和文) プラズマ乱流の低次元力学モデルの数学解析

研究課題名(英文) Mathematical analysis of low-dimensional dynamical system of plasma turbulence

研究代表者

近藤 信太郎 (Kondo, Shintaro)

岐阜大学・工学部・准教授

研究者番号：60726371

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,700,000円

研究成果の概要(和文)：プラズマを記述する3変数常微分方程式であるSugama-Hortonモデルに対して、乱流エネルギー k の式の散逸係数が定数かつ、外力 q が定数と仮定した場合を考え、時間大域解の存在、解の正値性を示した。また、 q が小さいとき、L-modeの定常解(すなわち帯状流エネルギー $f=0$)が大域的に漸近安定であることを示した。M.OttavianiやM.Muragliaらによる論文で研究されている簡約化MHD方程式に対して周期境界条件の下で解の存在定理を証明した。外部からシアー流れが加えられたMHD方程式に対して、Shearing-periodic境界条件の下で解の存在定理を証明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

核融合プラズマの主要な研究課題のひとつに、シアー流れの効果の研究がある。例えば、Sugama-Hortonモデルは、プラズマが乱流状態にあるときから、帯状の流れ(帯状流・シアー流れ)が支配的なときへの相転移現象を説明するモデルである。また、Hawley他は1995年の論文においてshearing-periodic境界条件を用いて天体の降着円盤の数値シミュレーションを行った。本研究で得られた成果は、数値シミュレーション及び数学解析の立場から、Sugama-Hortonモデルやshearing-periodic境界条件の応用に関する研究成果を得たという意義がある。

研究成果の概要(英文)：For the Sugama-Horton model, a three-variable ordinary differential equation describing plasma, we considered the case in which the dissipation coefficient of the equation for turbulent energy k is constant and the external force q is constant, and proved the existence of a global-in-time solution, and positivity of solution. We also showed that when q is small, the steady-state solution for L-mode (i.e., zonal flow energy $f=0$) is globally asymptotically stable. For the simplified MHD equations studied in papers by M. Ottaviani and M. Muraglia, we proved the existence theorem under periodic boundary conditions. For the MHD equations with an external shear flow, we proved the existence theorem under shearing-periodic boundary conditions.

研究分野：非線形偏微分方程式

キーワード：偏微分方程式 常微分方程式 プラズマ

1. 研究開始当初の背景

プラズマがフィラメント構造を作るとは自然現象から観測可能である。磁場で閉じ込めた高温プラズマが周辺領域に帯状流を自ら作り、プラズマの乱流を自ら抑制する現象が存在することは実験によって明らかにされている。1995年に Sugama と Horton は、簡約化 MHD 方程式から 3 変数の常微分方程式モデル (Sugama-Horton モデル、引用文献) を導出して、プラズマが乱流状態にあるとき (L-mode) から帯状流が支配的になるとき (H-mode) への相転移現象が説明可能であることを明らかにした。

2. 研究の目的

太陽フレアやオーロラは典型的なプラズマ現象であり、フィラメント構造を自ら作るという特徴がある。高温に加熱した核融合プラズマにおいては、乱流状態にあるプラズマの周辺領域に帯状の流れ (帯状流) を作り、乱流を自ら抑制することが実験によって明らかにされている。プラズマ乱流の低次元力学モデルを用いた研究として、1995年に Sugama と Horton は、3 変数常微分方程式を導出して、プラズマが乱流状態にあるとき (L-mode) から帯状流が支配的になるとき (H-mode) への相転移現象が説明可能であることを明らかにした。彼らのモデル方程式は Prey-Predator モデルと類似の構造をもっている。本研究では Sugama-Horton モデルの数学解析を行い数値シミュレーションで得られた結果の数学解析による正当化を行うことと、周期的外力があるときに数値解析および概周期関数のフーリエ級数を用いた数学解析を行うことを目的とした。

3. 研究の方法

数学解析と数値シミュレーションは研究代表者が行ったが、共著論文の数値シミュレーションの一部を共著者に実施してもらった。数年間出張を自粛していたため、当初の計画で予定していた物理学者との研究討論を行うことができなかった。そのため、研究室の学生と共同研究を進めるという形で研究を進めることになったが、教育的効果も考慮して多段階法や擬スペクトル法を用いたプログラムを Fortran で作成して数値シミュレーションも行うことにした。

4. 研究成果

以下の 3 つの研究成果を得た。

(1) 1995年に Sugama と Horton は簡約化 MHD 方程式から 3 変数常微分方程式を導出して、プラズマが乱流状態にあるとき (L-mode) から帯状流が支配的になるとき (H-mode) への相転移現象が説明可能であることを明らかにしたが、そのモデル方程式を Sugama-Horton モデルと呼ぶ。Sugama-Horton モデルに対して、乱流エネルギー k の式の散逸係数が定数かつ、外力 q が定数と仮定した場合を考え、時間大域解の存在、解の正値性を示した。また、 q が小さいとき、L-mode の定常解 (すなわち帯状流エネルギー $f=0$) が大域的に漸近安定であることを示した。この研究成果をまとめた論文は査読付き雑誌に掲載された ([雑誌論文] の項の 1 件目の論文)。

当初の研究計画では、Sugama-Horton モデルに対して $q=q(t)$ が周期関数である場合を考える予定であったが、Sugama-Horton モデルの導出元になった簡約化 MHD 方程式と比較的近い構造をした非線形偏微分方程式に対する研究を行った。

(2) 当初の研究計画では、Sugama-Horton モデルに対して研究を進める予定であったが、Sugama-Horton モデルの導出元になった簡約化 MHD 方程式と近い構造をしたモデルに対して研究を行うことにした。プラズマ中に生じるテアリング不安定性和磁力線の繋ぎ変えを再現した簡約化電磁流体力学 (MHD) 方程式として、Ottaviani らによって研究されているモデルがある (引用文献)。Ottaviani らは、引用文献の中で、テアリング不安定性によって生じた磁気島のサイズや個数がパラメーターに依存して変化することを明らかにした。通常の圧縮性 MHD 方程式はオームの法則が用いられているため、磁場の方程式に密度勾配が現れないが、Ottaviani らの用いた MHD 方程式は一般化オームの法則が用いられているため、磁気ポテンシャルの式に密度勾配の項が現れるという違いがある。そのため、密度の不均一性によって生じる交換型不安定性を調べるのにも適している。このような先行結果があるため、研究代表者と共著者はプラズマ抵抗値が有限であるとテアリング不安定性和磁力線の繋ぎ変えが生じることを、簡約化 MHD 方程式に対して多段階法を用いたプログラムを Fortran で作成して数値シミュレーションを行うことによって確認した。その後、Ottaviani らの用いた MHD 方程式に対して 2 次元の長方形領域で周期境界条件を課した問題を考え、強解がある時間まで一意に存在することの証明を与えた。解の存在定理を証明した論文は査読付き雑誌に掲載された ([雑誌論文] の項の 2 件目の論文)。

(3) 核融合プラズマの主要な研究課題のひとつに、シア一流れの効果の研究がある。近年、せん

断流れがプラズマの不安定性に及ぼす効果が核融合プラズマの分野で研究されている（引用文献）。そこで、研究代表者と共著者はせん断流れの大きさによって、渦度スペクトルの時間発展の様子がどのように変化するのかを数値シミュレーションを用いて調べることにして、擬スペクトル法を用いた数値シミュレーションを行うプログラムを Fortran で作成した。擬スペクトル法は、空間方向に対する高速フーリエ変換を偏微分方程式の解法に用いるものである。他方、Hawley 他は 1995 年の論文（引用文献）において、shearing-periodic 境界条件を用いて天体の降着円盤の数値シミュレーションを行った。Shearing-periodic 境界条件の下で、せん断流れのあるプラズマ乱流のモデル方程式に対する数学解析の論文は見当たらなかったが、外部からシアー流れが加えられた空間 2 次元のプラズマを記述する MHD 方程式に対して、shearing-periodic 境界条件の下で強解が一意的に時間大域的に存在することを証明して論文にまとめた。ただし、プラズマ抵抗値と粘性が正の定数の場合を考えた。論文の中では、線形移流方程式に対して shearing-periodic 境界条件を課した問題も考え、Uniformly local L2 空間におけるエネルギー評価式を導出したが、計算方法は Taniuchi（引用文献）と類似の方法を用いた。しかし、shearing-periodic 境界条件の下でエネルギー評価式を得るために、新しく cut off 関数を導入した点に新規性がある。現在、論文を投稿する最終チェックを行っており、近々論文を投稿する予定である。研究成果の学会発表も近々行う予定である。

< 引用文献 >

- H. Sugama, W. Horton, Plasma Phys. Control. Fusion, 37(1995), 345-362.
- M.Ottaviani, et al., Phys.Rev.Lett. 93(2004), article 075001.
- 市口, 他, J. Plasma Fusion Res. 96(2020), 579-587.
- JF. Hawley, et al., Astrophys.J. 440(1995), 742-763.
- Y.Taniuchi, Comm. Math. Phys. 248(2004), 169-186.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Kondo Shintaro, Numata Ryusuke	4. 巻 61
2. 論文標題 Existence theorem and global asymptotical stability for low-dimensional dynamical models of plasma turbulence	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 042702 ~ 042702
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1063/1.5130719	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kondo Shintaro, Sawamura Takamasa	4. 巻 203
2. 論文標題 Existence of a strong solution for the 2D four-field RMHD equations	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Annali di Matematica Pura ed Applicata	6. 最初と最後の頁 447 ~ 473
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10231-023-01370-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計0件

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------