

令和 6 年 6 月 7 日現在

機関番号：22604

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2020～2023

課題番号：20K03791

研究課題名（和文）微視的な系での断熱サイクルを通じた量子古典対応

研究課題名（英文）Quantum-classical correspondence in adiabatic cycles

研究代表者

田中 篤司（Atushi, Tanaka）

東京都立大学・理学研究科・助教

研究者番号：20323264

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,600,000円

研究成果の概要（和文）：これまで量子系で調べられてきた新奇な量子ホロノミーに対応する古典系での類似物を探索した。新奇な量子ホロノミーとは、定常状態に準備された量子系が断熱サイクルによって始状態でのものとは異なる定常状態に移行することだ。新奇な量子ホロノミーの具体例の多くは特異なポテンシャルを要求するために量子古典対応の存否は非自明と考えられていた。これを受け、新奇な量子ホロノミーの古典類似物としての完全可積分系の作用変数のホロノミーを示す具体例を古典的な連成振動、および、磁場中の荷電粒子にて見いだした。

研究成果の学術的意義や社会的意義

断熱サイクルにおける量子古典対応として、幾何学的位相（ベリー位相）とハネー角の対応は良く知られたものだったが、新奇な量子ホロノミーのような状態変化についての古典類似物の理解が確立した。このことは非熱的な系での断熱過程の理論的な理解を整備した点で重要である。同時に、作用変数（あるいは、基準振動数や基準振動自体の関数形）が断熱サイクルで変化させることができることは、古典系での断熱制御への応用としても有用だと思われる。

研究成果の概要（英文）：I explored classical analog of exotic quantum holonomy, where a quantum system prepared in a stationary state adiabatically transported to a different stationary state through a closed path. It is difficult to write down the corresponding classical equation of motion for examples of exotic quantum holonomy, as they often involves non-classical term such as Dirac delta potential. It is shown that classical coupled oscillators and a charged particle in a magnetic field exhibit classical analog of exotic quantum holonomy, i.e., holonomy in action.

研究分野：数理物理および物性基礎関連

キーワード：アンホロノミー 新奇な量子ホロノミー 量子古典対応 トポロジカルポンプ 微小振動 断熱サイクル

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

非熱的な系の断熱的な時間発展を実現するには、系を定常状態に準備した後で外場の強さ等のパラメーターを十分ゆっくり変化させる。断熱定理は、系が時々刻々定常状態に留まりつつ変化していくことを保証する。単純な一例は、スピンの向きを静磁場と平行に準備したあとで、ゆっくり磁場の向きを変化させると、スピンの向きが磁場の向きに追従することだ。

古典力学での断熱定理での重要な一例は、完全可積分系での作用変数が断熱不変量であることだ。この事実は、歴史的には、量子論を構築するための指導原理の一つでもあった。現在でも、作用変数の量子化を利用する半古典量子化の方法として、Bohr-Sommerfeld 量子化、および、これを多自由度系へと拡張した Einstein-Brillouin-Keller 量子化が用いられている。

量子論での断熱定理は、定常状態と量子ダイナミクスとの対応を与える初歩的な知見であり、例えば、原子分子物理での Born-Oppenheimer 近似のような基礎的な位置を占めている。また、近年では量子系の制御や量子計算でも断熱定理は重要な役割を担っている。

かつて量子論の断熱定理では位相の扱いに見落としがあったが、Berry (1984) による幾何学的位相 (ベリー位相) の指摘に代表される多くの研究により、このことが周知された。幾何学的位相は量子ホール効果の線形応答理論等、量子物理学の要所に現れる。また、幾何学的位相は、その数理的な解釈 (Simon 1983) から量子ホロノミーとも呼ばれる。一方、これらの研究でもそうであったが、量子系の断熱的な時間発展を論じる場合、現在でも暗黙の仮定が無批判に用いられている。この仮定とは位相を除くと断熱的な時間発展は経路の履歴には依存しないということだ。これは、断熱状態は経路の始点と終点の位置のみで定まることと等価である。ここから、断熱サイクルでは場合は状態が変化しないと含意されてしまう。

近年、「新奇的量子ホロノミー」と呼ばれる、この仮定への反例が、いくつかの物理系で報告された。即ち、断熱閉経路による時間発展は系の定常状態を変化させ得る。このような変化を引き起こすのは、フロケ系 (周期外力を受ける系) での擬固有エネルギーの巻き付きや、準位交差等である。その後、新奇的量子ホロノミーが発現せずに従来の暗黙の想定が妥当である条件が、位相幾何学的な解析を通じて明らかになった。その一例は「断熱サイクルが一点とホモトピックであれば、新奇的量子ホロノミーは発現しない」である (Tanaka and Cheon, PLA (2015))。

しかしながら、その発見当初からあった「新奇的量子ホロノミー」が基礎物理に投げかける疑惑はまだ解消されていない。この疑惑を標語的にまとめると、「新奇的量子ホロノミーは量子古典対応に矛盾をもたらす」ことである。

つまり、新奇的量子ホロノミーが起きる場合、量子系の定常状態は、断熱サイクルの途中で滑らかに変形しつつ、最後に、元の系の別の定常状態に到達する。もし、この定常状態が Bohr-Sommerfeld 量子化から構成可能なものであれば、その古典作用は断熱サイクルによって変化しなければならない。これは古典的な断熱定理と矛盾するように見える。

この矛盾はどのように解消するべきだろうか？例えば、古典的な断熱不変量は何らかの事情で、実は、断熱変化し得るのだろうか？あるいは、何らかの理由により、新奇的量子ホロノミーの起き得る物理系では、量子古典対応を論じることができないのだろうか？もしくは、新奇的量子ホロノミーは量子論と古典論の根本的な違いを浮き立たせる「量子異常」の一つなのだろうか？

2. 研究の目的

上述した、新奇的量子ホロノミーが示唆する量子系と古典系間の矛盾を解消し、その背景を深く理解することが、本研究の目標である。

このような論点はこれまで着目されてこなかったが、その最大の理由は、新奇的量子ホロノミーの研究が未成熟であったことだ。つまり、新奇的量子ホロノミー自体は準位縮退の無い二準位系で起きることから、さまざまな物理系でも起き得るように見えながらも、それぞれの具体例が持つ特殊性のために、量子古典対応を論じる意義は必ずしも明らかではなかった。

しかしながら、新奇的量子ホロノミーの研究の進展と、我々が進めてきた量子古典対応に関するいくつかの予備的な考察、および、古典力学における関連研究を通じて、この問題は相応の労力を費やすに値する課題になったと考える。

3. 研究の方法

本研究を遂行するには、従来、よく理解されてきたとされる古典力学の枠組みについて、数学・数理物理学としては重大な事柄でありつつも、物理学としては重箱の片隅と思えそうな微妙な事柄を掘り下げる必要がある。これらは例えば「相空間中で大域的に定義できない作用角変数」や「パラメーター空間中の特異性」である。なお、前者は数学での Hamiltonian monodromy の研究として一分野を形成する (例えば、Cushman and Bates, *Global Aspects of Classical Integrable Systems* (Birkhäuser, Basel, 1997))。

研究開始時点では、新奇な量子ホロノミーの古典類似物がどのようなものであるかは不明瞭であった。さらに、既存の新奇な量子ホロノミーの具体例はデルタ関数で記述される鋭いポテンシャルの強度無限極限のような特異な設定を必要とするため、対応する古典系を即座に書き下すこともかなわなかった。

ここでは、新奇な量子ホロノミーを示す量子系の例として、一次元空間中の閉じこめられた質点の問題 (Cheon, Tanaka and Turek, Acta Polytechnica (2013); Kasumie, Miyamoto and Tanaka, PRA (2016)) を再考した。この系は、鋭いポテンシャルによる系の断熱的な切断と融合を通じて、断熱サイクルによる固有エネルギーの組み替え (braiding) が起きる。このような断熱的な切断と融合を自然に起こせるような古典系を探索した。

一つの候補として、調和的な格子振動の問題に辿りついた。これを断熱的に切断する方法として、ピン止めポテンシャルを導入し、その強度 (曲率) を断熱的に発散させた場合であっても低エネルギーモードの運動が発散しないことを確かめた。この系は完全可積分な古典系なので、その自由度に応じた作用角変数が存在する。さらに、調和的な系であることから、基準振動解析が適用可能であるとともに作用角変数を陽に求めることが可能である。この結果、新奇な量子ホロノミーの古典対応物として、断熱サイクルに沿った基準振動数の組み替えが起きることを見いだした。これは固有エネルギーのホロノミーの古典対応物と呼ぶにふさわしいものである。

上述の状況を調和格子として自然な形 (ピン止め以外のバネ定数が断熱サイクル中で一定かつ一様) で実現するには、ある程度の粒子数が必要であり、そのために基準振動解析のレベルダイナミクス (固有エネルギーでは Pechukas (1983) が最も初期の研究である) を数値計算で調べる必要がある。この場合、発散する基準振動を特別に扱う必要がある。本研究では次元の異なる行列の基準振動を接続するプログラムを開発することでこの問題に対処した。

4. 研究成果

(1) 一次元格子振動系での作用変数のホロノミー

調和的な一次元格子振動系の古典力学による取り扱いにおいて、断熱的な時間発展での経路依存性を調べた。格子の切断や接合が断熱的な基準振動数を組み換え得ることを示した。このことから、初期条件では一定の基準振動の下にあったとしても、断熱経路を適切に選ぶことで終状態の基準振動を選ぶことができることを示した。また、断熱サイクルは断熱不変量である作用変数のポンプとして機能し得ることも示した (Tanaka, PLA (2023))。

調和格子にピン止めポテンシャルを導入すると、ピン止め強度を発散させる極限で調和格子中のいくつかの質点をクランプできる。これを利用することで断熱クランプの経路依存性を示した。右図はその一例である。始状態では同じ基準振動から出発するが、異なる断熱経路の結果、終点で占有する基準振動が異なる。左側では、左から3番目の質点を断熱的にクランプした後で左側に振動が局在する; 図の右側では2番目の質点のクランプ後に3番目をクランプし、その後2番目を開放した後に振動は右側に局在する。

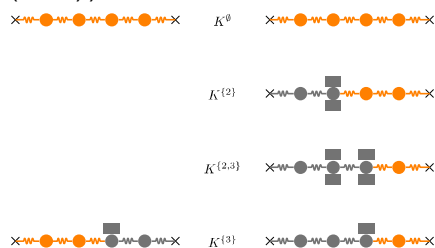


図 基準振動の経路依存性

$$C_1: K^0 \mapsto K^{(3)} \quad C_2: K^0 \mapsto K^{(2)} \mapsto K^{(2,3)} \mapsto K^{(3)}$$

これらのようなパラメータ変形による基準振動数の

変化は、弾性体の一部を硬化させる場合の基準振動解析では Rayleigh-Courant-Fisher の定理として知られている (アーノルド、古典力学の方法 (原著 1974))。本研究での新たな寄与は、終点での基準振動が経路に依存すること具体例で示したことだ。

上に示した経路から閉経路 C を定義する。この閉経路に沿った断熱的な時間発展は基準振動数をポンプする (右図)。

この系は調和的なので、 C 上の各点で作用角変数 (j_n, θ_n) を定義できる。これは元々の系の自然な変数 (q_n, p_n) と正準変換で結びつが、経路の各点毎に正準変換が変形していく。つまり、作用角変数は (q_n, p_n) の関数であり、その関数形は断熱パラメータに依存する。この意味で作用変数にホロノミーが起きることが許されつつも断熱保存量となる。

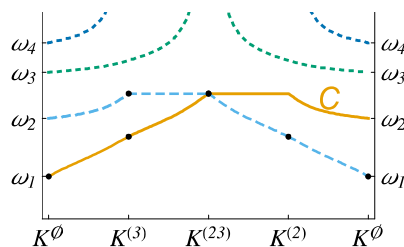


図 C に沿った基準振動数の変化

作用変数に加えて、この断熱過程での別の断熱不変量として基準振動の節の数を考えたい。確かに系の切断や接着の無い場合は節の数もまた断熱不変量である。しかし、系の切断や接着の前で節の数変動してしまう。つまり、断熱サイクル C ではトポロジカルな変化の起きる場所が断熱パラメータ空間中で局在する。既存の新奇な量子ホロノミーのホモトピーによる特徴付けから示唆されることは作用変数のホロノミーもまた断熱パラメータ空間中の大域的な性質に支配される (Tanaka and Cheon, PLA (2015)) と考えたいが、これら二つの描像の競合

を解決することは将来の課題としたい。

断熱サイクル C の応用として、人為的な端状態を空間的に輸送するポンプを構成した。C の途中に現れる二重縮退点では二つの基準振動として互いに空間的に重なり無く局在するものを準備できる。片方の局在振動を出発点とすると、断熱サイクルの結果、終状態はもう一つの局在した基準振動になる(右図)。これは一見、既知の Thouless pump に類似するよう見えるが、バルクの構造に依らずにポンプが実現しているため、全く別物と結論すべきものである。

ここで得られた新奇な量子ホロノミーの古典対応物は、複数自由度の場合に特有なものである。なぜなら、ある自由度に割り当てられた作用変数が断熱サイクルを通じて、別の自由度の作用変数に変化するためである。この意味で、ここで調べた系を量子化することで、本研究の出発点としていたもの(Cheon, Tanaka and Turek, Acta Polytechnica 2013; Kasumie, Miyamoto and Tanaka, PRA 2016)とは別の、新奇な量子ホロノミーの例を得ることになる。物理的な状況としては、場の量子論での新奇な量子ホロノミーの例になっていると言って良い。本課題のなかでは、非線形な完全可積分系での具体例も探したが、断熱的に切断・接合できるようなモデルを構成することができなかった。この点についても将来の課題としたい。

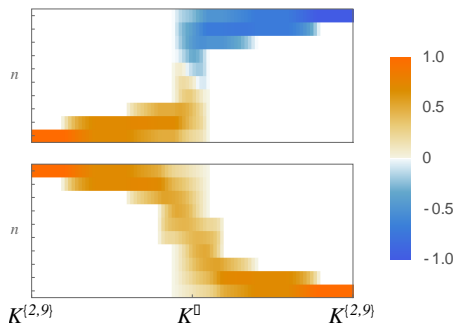


図 人為的な端状態間の断熱輸送

(2) 断熱サイクルがフロケ量子系の擬固有回転を引き起こす場合の古典対応物

spin-1/2 の系の期待値の方程式は古典的な角運動量の運動方程式とも読むことができ、これを利用して量子キックドスピン系での新奇な量子ホロノミー(Tanaka and Miyamoto)に対して古典対応物を導くことができる(Tanaka and Cheon, 準備中)。この結果を磁場中の荷電粒子の運動の制御に応用し、一種の磁気的な鏡として機能することを示した(Tanaka, 準備中)。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Tanaka Atushi	4. 巻 460
2. 論文標題 Topological adiabatic dynamics in classical mass-spring chains with clamps	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Physics Letters A	6. 最初と最後の頁 128621 (6pages)
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.physleta.2023.128621	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Tanaka Atushi, Nakamura Takaaki, Cheon Taksu	4. 巻 102
2. 論文標題 Generating a nonequilibrium stationary state from a ground-state condensate through an almost adiabatic cycle	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Physical Review A	6. 最初と最後の頁 13308
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1103/physreva.102.013308	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計2件（うち招待講演 0件 / うち国際学会 0件）

1. 発表者名 田中篤司
2. 発表標題 クランプを使った断熱トポロジカルポンプ
3. 学会等名 日本物理学会 2023年春季大会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 田中篤司
2. 発表標題 バネ質点系での断熱サイクルによる作用交換
3. 学会等名 日本物理学会 第76回年次大会
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

<https://researchmap.jp/tanaka-atushi>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------