

令和 5 年 6 月 15 日現在

機関番号：12301

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2020～2022

課題番号：20K04358

研究課題名（和文）複雑形状を有する薄肉板の区分分割による低計算コスト非線形振動解析法の構築

研究課題名（英文）Development of Analytical Method on Low-computational-cost Nonlinear Vibrations of a Complex-shaped Thin Walled Plate with Dividing Segments

研究代表者

丸山 真一（Maruyama, Shinichi）

群馬大学・大学院理工学府・教授

研究者番号：60344925

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,100,000円

研究成果の概要（和文）：複雑形状を有する平板や曲板の非線形振動解析手法の確立を目的として、対象物を比較的少数の区分に分割し、高階微分可能な関数により面外および面内変形を近似することで、面外-面内変形の連成を高精度かつ、要素積分の更新を伴わない、低計算コストでの解析を可能とする定式化の構築を行った。まず、従来直交した座標系に基づき構築してきた解析手法を非直交の区分に分割する手法に拡張した。さらに、浅いシェルパネルにおける面外・面内連成を有する振動解析に本手法を拡張し、厳密解との比較により本解析の妥当性を確認した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

極端な軽量化や微細化が進展する近年の機械要素において、各方向の変形が連成した複雑な振動応答の解析を、高精度かつ低コストで行うことは重要であり、その確立につながる成果が得られたものと言える。

研究成果の概要（英文）：Aiming at developing analytical method of nonlinear vibrations of complex-shaped flat and curved plates, a formulation is proposed in which the plates are divided into segments with relatively small number and the deflection and in-plane displacements in the segments are assumed with higher order differentiable functions. First, the analytical method previously proposed in which the plates are divided into segments with orthogonal shape is extended to that based on non-orthogonal shape to meet the analysis of complex-shaped plates. Furthermore, the method was also extended to the vibrations of shallow shell-panel in which in-plane displacement and lateral deflection is coupled. The analytical results were compared with existing exact solutions which verify the presented analysis.

研究分野：機械力学

キーワード：非線形振動

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

近年、機械要素は形状の複雑化とともに、極端な微細化や薄肉化が進展している。薄肉な連続弾性体では、一見小さな面外変位でも、その板厚に比べて相対的に変形量が大きく、顕著な面内応力が生じる。これより、面内と面外の境界条件や要素自体の形状に非常に敏感な、非線形復元力特性が容易に生じる。そのため、微細、薄肉化された連続弾性体要素の高度動的設計のためには、非線形解析が必要である。

2. 研究の目的

本研究では、複雑形状を有する平板や曲板の非線形振動解析手法の確立を目的として、複雑な形状を有する対象物を比較的少数の区分に分割し、高階微分可能な関数により面外および面内変形を近似することで、面外-面内変形の連成を高精度かつ、要素積分の更新を伴わない、低計算コストでの解析を可能とする定式化を構築する。

3. 研究の方法

(1) 非直交区分分割による薄肉平板の曲げ振動解析

図1に解析モデルを示す。本研究では、厳密解と比較が可能な正方形板を解析の対象とし、その分割を非直交とした。板の中心を原点とする直交デカルト座標系を設け、 x 軸と y 軸を設け、板の一边の長さを a 、厚さを h 、密度を ρ 、ヤング率を E 、ポアソン比を ν とする。板の横方向のたわみを $W(x, y, t)$ とする。次式の関係を導入し、支配方程式の無次元化を行う。

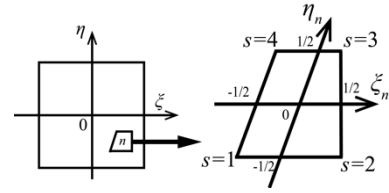


Fig. 1 Analytical model and coordinate system

$$\xi = x/a, \eta = y/a, t = \tau/\Omega_0, \Omega_0 = (1/a^2)\sqrt{D/\rho h}, w = W/h \quad (1)$$

ここで、 ξ 、 η はそれぞれ x 、 y 軸方向の無次元座標である。 w は無次元たわみである。 Ω_0 は板の固有振動数に関する量、 $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ は板の曲げ剛性、 t は時間、 τ は時間の無次元量である。正方形板の無次元支配方程式は、ハミルトンの原理より変分を用いて次のように表せる。なお、カンマの後ろの添え字はその変数による偏微分を表すものとする。

$$-\int_{\tau_0}^{\tau_1} \int_{\xi} \int_{\eta} \left\{ w_{,\tau\tau} \delta w + (w_{,\xi\xi} + \nu w_{,\eta\eta}) \delta w_{,\xi\xi} + (w_{,\eta\eta} + \nu w_{,\xi\xi}) \delta w_{,\eta\eta} + 2(1-\nu) w_{,\xi\eta} \delta w_{,\xi\eta} \right\} d\xi d\eta d\tau = 0 \quad (2)$$

図1のように正方形板を N 個の非直交区分に分割し、区分 n 内の局所座標として ξ_n 、 η_n 軸を設定した。式(2)を無次元区分座標 ξ_n - η_n に変換し、区分 n についての支配方程式が求まる。区分 n 内でのたわみを7次までのべき級数から成る座標関数 $\bar{z}_{nkl}(\xi_n, \eta_n)$ と未知時間関数 $C_{nkl}(\tau)$ を用いて次式のように表す。

$$w_n(\xi_n, \eta_n, \tau) = \sum_{k=1}^8 \sum_{l=1}^8 C_{nkl}(\tau) \bar{z}_{nkl}(\xi_n, \eta_n), \quad \bar{z}_{nkl}(\xi_n, \eta_n) = (2\xi_n)^{k-1} (2\eta_n)^{l-1} \quad (3)$$

なお本研究ではべき級数と三角関数の積から成る座標関数も用いたが、本稿ではべき級数を用いた結果のみを示す。たわみと高階微分が複数の区分が共有する節点で連続性を満足するために、区分 n の各節点のたわみと、その3階までの空間微分から成る区分節点ベクトル $\{b_n\}$ を導入する。 $\{b_n\}$ の各成分は式(3)に区分節点の座標を代入することで得られるので、式(3)の $C_{nkl}(\tau)$ は $\{b_n\}$ で表現できる。その結果を式(3)に代入し、区分内のたわみは次式で表される。

$$w_n(\xi_n, \eta_n, \tau) = \{b_n\}^T \{\zeta_n\} \quad (4)$$

ただし、 $\{\zeta_n\}$ は $\{b_n\}$ を未知時間関数にとった形状関数である。式(4)を区分 n での支配方程式に代入し、ガラーキン法を適用すると、次式を得る。

$$\begin{bmatrix} [B_1] & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & [B_N] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{b_{1,\tau\tau}\} \\ \vdots \\ \{b_{N,\tau\tau}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [C_1] & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & [C_N] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{b_1\} \\ \vdots \\ \{b_N\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \vdots \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

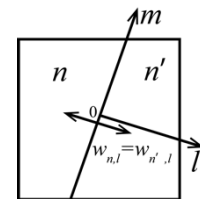


Fig. 2 Normal-tangential coordinate

同一節点を共有する複数の区分で異なる座標系をもつため、式 (5) では複数の区分が共有する節点で区分節点ベクトルの成分を共有させることができない。節点で物理量の連続性を満たすために、ラグランジュ未定乗数法を用いる。図 2 に示すように、区分の辺に沿った法線-接線座標系 $l-m$ を設け、たわみとその方向への 3 階までの空間微分を共有させる。上記の手続きでは節点のみで連続性が満足され、後述するように、区分辺上で不連続性が生じる場合がある。そこで、選点法を適用し、区分の辺の中点でたわみの法線方向の微分値を区分間で連続となるように拘束する。さらに、境界条件に応じて、幾何学的条件に対応する物理量とその境界辺に沿った方向に関する 3 階までの微分値を境界辺上の節点においてラグランジュ未定乗数法より 0 に拘束する。式 (5) に以上の処理を施した式から対応する振動数方程式を解き、固有振動数と固有ベクトルが求まり、式 (4) より各区分内のたわみの固有振動形が求まる。

(2) 薄肉曲板の面内面外連成振動解析

図 3 に解析モデルを示す。薄い矩形の曲板の中心を原点とし、中央面に直交する $x-y-z$ 座標系を設定する。板は曲率を有し、 x 軸、 y 軸方向への曲率半径は R_x, R_y である。板の一边の長さをそれぞれ a, b 、板の厚さを h 、密度を ρ 、ヤング率を E 、ポアソン比を ν とする。 x 軸と y 軸方向の面内変位を $U(x, y, t), V(x, y, t)$ とし、 z 軸方向のたわみを $W(x, y, t)$ とする。次式の関係を導入し、支配方程式の無次元化を行う。

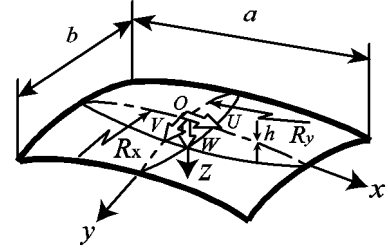


Fig. 3 Analytical model

$$\xi = x/a, \eta = y/a, \alpha_x = a^2/R_x h, \alpha_y = a^2/R_y h, \beta = a/b, D = Eh^3/12(1-\nu^2) \quad (6)$$

$$t = \tau/\Omega_0, \Omega_0 = (1/a^2)\sqrt{D/\rho h}, w = W/h, u = U(a/h^2), v = V(a/h^2)$$

ξ, η は x, y 軸方向の無次元座標、 α_x, α_y は曲率係数である。 β は境界の辺比、 D は板の曲げ剛性、 Ω_0 は板の固有振動数に関する量、 τ は無次元時間である。 u, v は無次元面内変位、 w は無次元たわみである。板の無次元方程式は、ハミルトンの原理より変分を用いて次式で表せる。なお、カンマのあとの添え字はその変数による偏微分を表す。

$$\begin{aligned} & -\int_{\tau_0}^{\tau_1} \int_{\xi} \int_{\eta} \left[\left\{ w_{,\xi\xi} \delta w + (w_{,\xi\xi\xi} + \nu \beta^2 w_{,\eta\eta\xi\xi}) \delta w_{,\xi\xi\xi} + \beta^2 (\beta^2 w_{,\eta\eta\xi\xi} + \nu w_{,\xi\xi\xi\xi}) \delta w_{,\eta\eta\xi\xi} + \beta^2 (\beta^2 w_{,\eta\eta\xi\xi} + \nu w_{,\xi\xi\xi\xi}) \delta w_{,\eta\eta\xi\xi} + 2\beta^2 (1-\nu) w_{,\xi\eta} \delta w_{,\xi\eta} \right\} \right. \\ & + 12 \left\{ (u_{,\xi} + \nu \beta v_{,\eta} - \alpha_x w - \nu \alpha_y w) \delta u_{,\xi} + \frac{1-\nu}{2} \beta (\beta u_{,\eta} + v_{,\xi}) \delta u_{,\eta} + \frac{1-\nu}{2} (\beta u_{,\eta} + v_{,\xi}) \delta v_{,\xi} + \beta (v u_{,\xi} + \beta v_{,\eta} - \nu \alpha_x w - \alpha_y w) \delta v_{,\eta} \right. \\ & \left. \left. + (\alpha_x^2 + 2\nu \alpha_x \alpha_y + \alpha_y^2) w \delta w - (\alpha_x + \nu \alpha_y) u_{,\xi} \delta w - \beta (\nu \alpha_x + \alpha_y) v_{,\eta} \delta w \right\} \right] d\xi d\eta d\tau = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

図 4 のように正方形板を N 個の直交区分に分割し、区分 n 内の局所座標として ξ_n, η_n 軸を設定した。式 (7) を無次元区分 $\xi_n - \eta_n$ 座標に変換し、区分 n についての支配方程式が求まる。区分 n 内でのたわみを座標関数 $\bar{z}_{nkl}(\xi_n, \eta_n)$ と未知時間関数 $C_{nkl}(\tau)$ を用いて次式のように表す。

$$w_n(\xi_n, \eta_n, \tau) = \sum_{k=1}^8 \sum_{l=1}^8 C_{nkl}^w(\tau) \bar{z}_{nkl}(\xi_n, \eta_n), \quad \bar{z}_{nkl}(\xi_n, \eta_n) = (2\xi_n)^{k-1} (2\eta_n)^{l-1} \quad (8)$$

たわみとその高階微分が複数の区分が共有する節点で連続性を満足するために、区分 n の各節点のたわみと、その 3 階までの空間微分から成る区分節点ベクトル $\{b_n^w\}$ を導入する。 $\{b_n^w\}$ の各成分は式 (8) に区分節点の座標を代入することで得られるので、式 (8) の $C_{nkl}^w(\tau)$ は $\{b_n^w\}$ で表現できる。その結果を式 (8) に代入し、区分内のたわみは次式で表される。

$$w_n(\xi_n, \eta_n, \tau) = \{b_n^w\}^T \{\xi_n\} \quad (9)$$

ただし、 $\{\xi_n\}$ は $\{b_n^w\}$ を未知時間関数にとった形状関数である。同様に面内変位 u_n, v_n も区分節点ベクトル $\{b_n^u\}, \{b_n^v\}$ と形状関数 $\{\xi_n\}$ で表現し、 $\{b_n^u\}, \{b_n^v\}, \{b_n^w\}$ から成る面外、面内変位に対する区分節点ベクトルを $\{b_n\}$ とする。これらの面外・面内変位の仮定を基に、区分 n での支配方程式に Galerkin 法を適用すると、次式を得る。

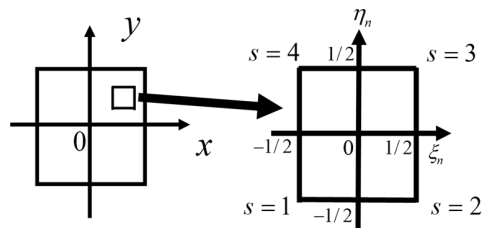


Fig. 4 Global and local coordinate

$$\begin{bmatrix} [B_1] & 0 \\ & \ddots \\ 0 & [B_N] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{b_{1,\tau\tau}\} \\ \vdots \\ \{b_{N,\tau\tau}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [C_1] & 0 \\ & \ddots \\ 0 & [C_N] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{b_1\} \\ \vdots \\ \{b_N\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \vdots \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

節点での各区分間の物理量の連続性を満たすために、ラグランジュ未定乗数法を用いる。さらに、境界条件に応じて、幾何学的境界条件に対応する物理量とその境界辺に沿った方向に関する3階までの微分値を境界边上の節点においてラグランジュ未定乗数法より0に拘束する。式(10)に以上の処理を施した式から対応する振動数方程式を解き、固有振動数と固有ベクトルが求まり、式(9)より各区分内のたわみの固有振動形が求まる。

4. 研究成果

(1) 非直交区分分割による薄肉平板の曲げ振動解析

板のポアソン比は0.3とし、図5のように区分の上下の辺の長さの比は1:2、 ξ 、 η 方向の分割数を $(M,N)=(2,1)$ 、 $(2,2)$ とした。ここでは、境界条件を一对辺単純支持(s) 他対辺自由(f)とした例を示す。

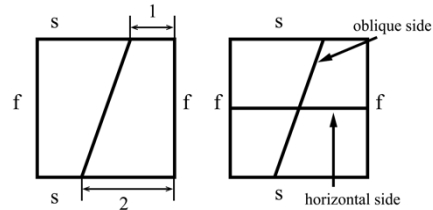


Fig. 5 Calculation condition

図6に分割数 $(M,N)=(2,1)$ で、選点法により斜辺の midpoint でたわみの法線方向の1階微分を拘束した場合(緑線)、及び拘束しなかった場合(赤線)の、固有振動数の厳密解^①からの相対誤差の絶対値を横軸のモード次数に対してそれぞれ示す。図4から midpoint の拘束がない場合に誤差が大きい1, 3, 5, 8次モードの固有振動数が、 midpoint を拘束することで誤差が劇的に小さくなり、固有振動数を精度良く計算できていることが確認できる。図7(a),

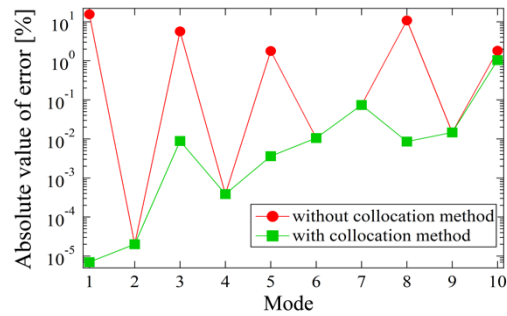
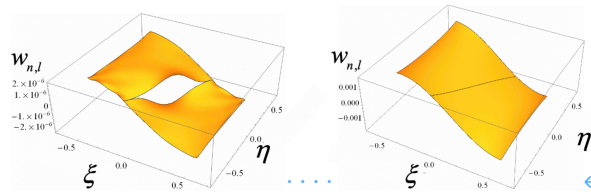


Fig. 6 Error in natural frequencies $(M,N)=(2,1)$

(b)にそれぞれ midpoint の拘束を行わない場合と midpoint の拘束を行う場合の1次モードのたわみの法線方向の1階微分 $w_{n,j}$ の空間分布をそれぞれ示す。 midpoint を拘束しない場合に辺上で不連続であったたわみの法線方向の1階微分が、 midpoint を拘束することで区分の辺上で滑らかに連続になっており、固有振動数の計算精度が改善されたと言える。

図8に分割数と拘束条件を変更した場合の固有振動数の誤差を比較して示す。

$(M,N)=(2,1)$ 、 $(2,2)$ とし、斜辺 (oblique side) の midpoint でたわみの法線方向の1階微分を拘束した結果及び、 $(M,N)=(2,2)$ で水平辺 (horizontal side) の midpoint でたわみの法線 (η) 方向の1階微分のみ、2階微分のみ、3階微分のみを拘束した結果を比較した。ただし、水平辺で1階微分を拘束した場合の1, 2次モードは固有振動数の計算結果が不定となった。図8から分割数 $(M,N)=(2,1)$ と $(2,2)$ において斜辺の midpoint のみを拘束した場合を比較すると、分割数 $(M,N)=(2,2)$ の方が4, 6次モードを除き、誤差が小さくなっている。さらに分割数 $(M,N)=(2,2)$ で水平辺の midpoint の拘束を変更した場合を各々比較すると、 η 方向の2階微分を拘束した場合の4, 6次モードの誤差がその他の条件より小さくなっている。斜辺の midpoint ではたわみの法線方向の1階微分、水平辺の midpoint では2階微分が固有振動数の計算精度向上に寄与している。



(a)without collocation method (b)with collocation method
Fig. 7 First order differentiation of deflection in normal direction of the first vibration mode

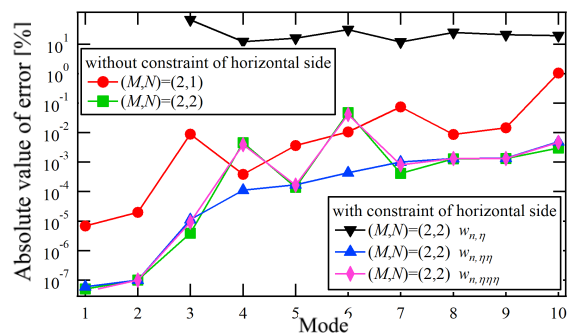


Fig.8 Error in natural frequencies with various constraint condition

(2) 薄肉曲板の面内面外連成振動解析

ξ, η 方向の分割数をそれぞれ M, N として、分割の条件を 1 区分で計算を行う $(M:N)=(1:1)$ と、 η 方向に平行に分割を施す $(M:N)=(2:1)$ の 2 条件とする。ポアソン比は 0.3 とし、境界条件は上下左辺単純支持右辺固定 (SSSC) とする例を示す。

x 方向に $\alpha_x=10$ の曲率を持つ円筒シェルパネルの厳密解^①からの誤差を図 9 に示す。グラフの縦軸は誤差の絶対値であり対数で表記し、横軸は固有振動モードの次数である。また (2:1) 分割の 1 次から 6 次の固有振動モードを図 10 に示す。図 9 より (1:1) 分割では誤差が 1 次から 4 次モードまでは 0.1% 程度で高精度、5 次、6 次モードでは 1% 以上となっている。(2:1) 分割では 5 次以外のモードは 0.01% 程度で高精度、5 次モードで 1% 以上となり、特に 6 次モードで極端に小さくなっている。図 4 より (2:1) 分割では 5 次モードで 2 分割していない ξ 方向に多くの半波数を有し、6 次モードで 2 分割した η 方向に多くの半波数を有している。分割した方向に多くの半波数を有しているため計算精度が良くなり、6 次モードで極端に誤差が小さくなっていると考えられる。

次に曲率を持たない平板の厳密解からの誤差を図 11 に示す。平板のモード形状は図 4 の円筒シェルパネルの場合と同様である。(1:1), (2:1) どちらの分割でも 1 次から 4 次モードまでは高精度に計算されており、さらに (2:1) 分割では 3 次、6 次モードで誤差が極端に小さくなっている。円筒シェルパネルと同様に、2 分割した η 方向に多くの半波数を有しているため誤差が小さくなっている。円筒シェルパネルでは 1 次から 4 次程度の低次モードでは誤差がほぼ同程度であるのに対し、平板では低次ほど誤差が小さくなっている。

<引用文献>

① W. Leissa, "VIBRATION OF SHELLS", Acoustical Society of America (1993), pp. 31-32, 83-85, 162-163

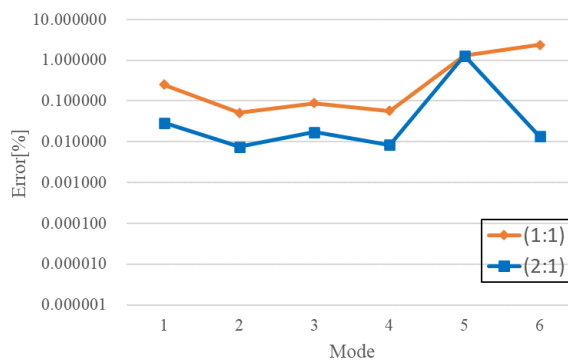


Fig. 9 Error in non-dimensional natural frequencies (SSSC), $\alpha_x=10$, $\alpha_y=0$

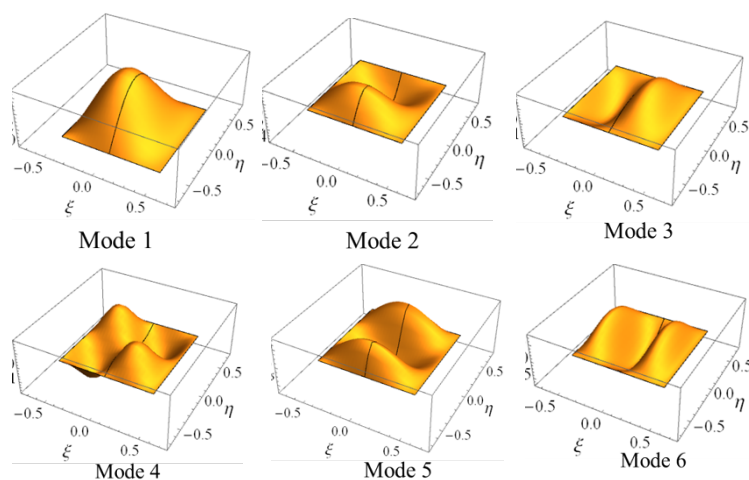


Fig. 10 Mode shape (2:1)(SSSC), $\alpha_x=10$, $\alpha_y=0$

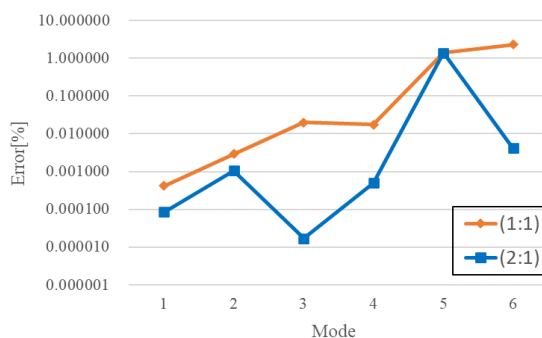


Fig. 11 Error in non-dimensional natural frequencies (SSSC), $\alpha_x=0$, $\alpha_y=0$

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計0件

〔学会発表〕 計1件（うち招待講演 0件 / うち国際学会 0件）

1. 発表者名 千徳 悠人, 丸山 真一, 永井 健一, 山口 誉夫, 神尾 ちひろ
2. 発表標題 高階微分可能形状関数を用いた区分分割による薄肉板の面内・面外連成振動解析
3. 学会等名 Dynamics and Design Conference 2022
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------