

令和 5 年 4 月 27 日現在

機関番号：17102

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2020～2022

課題番号：20K11680

研究課題名（和文）頂点被覆問題とその拡張に対するカーネル化に関する研究

研究課題名（英文）A Study on Kernelization Algorithms for the Vertex Cover Problem and its Generalizations

研究代表者

神山 直之（Kamiyama, Naoyuki）

九州大学・マス・フォア・インダストリ研究所・教授

研究者番号：10548134

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,900,000円

研究成果の概要（和文）：本研究課題では、基本的な離散最適化問題の一つである頂点被覆問題とその拡張に対するカーネル化アルゴリズムに関する研究を行い、以下の成果を得た。まず一つ目の成果は、ある種の非巡回ハイパーグラフ上の最適化問題に対するアルゴリズムの拡張である。そして、二つ目の成果は、Matroid-constrained maximum vertex cover problem に関するある結果の改良である。そして、三つ目の結果は Component order connectivity problem を拡張した問題に対するカーネル化アルゴリズムの提案である。

研究成果の学術的意義や社会的意義

頂点被覆問題は基本的な離散最適化問題の一つであるため、頂点被覆問題に対して開発された技術は、他の問題へ拡張されることが期待される。また、カーネル化の中心的なテーマの多くは理論的なものであるが、応用にも非常に近い分であり、その成果は理論的のみならず応用的にも重要な意味を持つことが期待される。

研究成果の概要（英文）：In this project, we considered kernelization algorithms for the vertex cover problem and its generalizations, and we obtained the following results. First, we extended an algorithm for an optimization problem on an acyclic hypergraph. Second, we improved a result on matroid-constrained maximum vertex cover problem. Third, we proposed a kernelization algorithm for a generalization of the component order connectivity problem.

研究分野：離散最適化

キーワード：頂点被覆問題 カーネル化

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

離散最適化問題とは、離散的な変数を持つ最適化問題である。現実社会における様々な場面で離散最適化問題は現れ、その研究は理論的にも応用的にも重要である。本研究課題は、特に離散最適化の理論的研究に関するものである。

離散最適化の理論的研究の方向性としては、大きく分けて以下の二つが考えられる。一つ目の方向性は、多項式時間(つまり効率的に)で解くことができる、良い構造を有する問題の研究である。例えば、二つの異なる集団間の最大サイズの割り当てを求める二部グラフ上の最大マッチング問題が、この方向性の研究において扱われる問題の一つとして挙げられる。この方向性においては、マトロイドや劣モジユラ関数といった抽象的な概念が重要な役割を果たす。しかしながら、社会において現れる離散最適化問題の中には、NP 困難と呼ばれる効率的に解くことが難しいと考えられている問題が数多く存在する。そのため、良い構造を有する問題に対する理論のみを用いて、社会において現れる問題を効率的に解くことができることを期待することは難しいと考えられる。そのような理由により、離散最適化の理論的研究のもう一つの方向性として、NP 困難問題のような難しいと思われる問題に対する研究が必要となる(図1の左図を参照)。

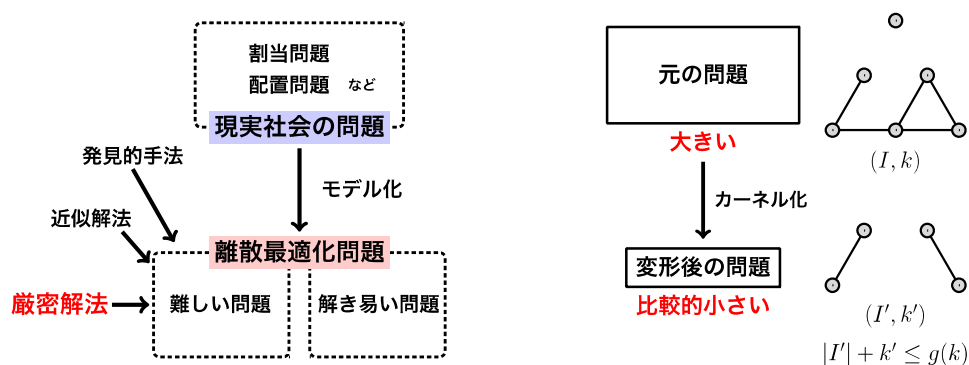


図1:(左)離散最適化の研究の全体像(右)カーネル化の概要

NP 困難問題のような難しいと思われる問題に対するアプローチの種類には、大きく分けて以下の三つが考えられる。一つ目のアプローチは、理論的精度保証はないが高速に質の良い解を求めることを目指す発見的手法の研究である。そして二つ目は、理論的精度保証のある多項式時間アルゴリズムの構築を目指す近似アルゴリズムの研究である。そして最後は多項式時間ではないが、可能な限り高速な厳密解法の構築を目指す厳密アルゴリズムの研究である。本研究課題では、三つ目の厳密アルゴリズムの研究を対象とする。特に、本研究課題では厳密アルゴリズムの中でも、カーネル化の研究を中心に行う。カーネル化とは一言で説明するならば「前処理の理論的研究」である(図1の右図を参照)。具体的には、複数のルールに従った前処理によって問題のサイズを縮小できることを理論的に示すことが、カーネル化の研究の目標となる。このカーネル化の研究は、固定パラメータ容易性という、難しいと思われる問題においてどのパラメータが難しさの要因となっているかを研究する分野と密接な関係がある点も非常に重要である。カーネル化の中心的なテーマの多くは理論的なものであるが、応用にも非常に近い分であり、その成果は理論的のみならず応用的にも重要な意味を持つことが期待される。

2. 研究の目的

本研究課題では、カーネル化の研究の中でも特に、基本的な離散最適化問題の一つである頂点被覆問題とその拡張に対するカーネル化を扱う。頂点被覆問題とはグラフが与えられたとき、全ての辺と共通部分を持つ点集合(頂点被覆と呼ぶ)の中で、最も点数が少ないものを求める問題である(図2参照)。

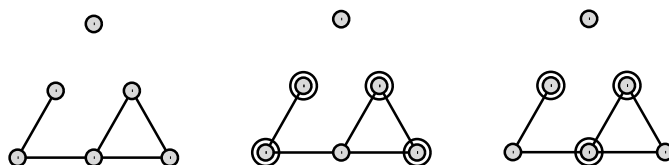


図2: 入力グラフと二つの頂点被覆

上でも述べたが、頂点被覆問題は基本的な離散最適化問題の一つである。従って、頂点被覆問題に対して開発された技術は、他の問題へ拡張されることが期待される。このような観点から、頂点被覆問題は、カーネル化の技術の開発において非常に重要な役割を果たすと考えられ、これまでも頂点被覆問題に対するカーネル化は活発に研究されてきた。

頂点被覆問題に対するカーネル化アルゴリズムの例を挙げる。Buss and Goldsmith (1993)によって提案された、「サイズが k 以下の頂点被覆が存在するかを判定する問題」に対するカーネル化アルゴリズムは、以下の二つのルールから構成される。

- ・ルール 1：孤立点（どの他の点とも辺で結ばれていない点）を取り除く。
- ・ルール 2：次数（接続している辺の数）が $k+1$ 以上の点を取り除き解に加える。

このルールを適用することにより、入力のグラフがサイズ k 以下の頂点被覆を持たないと判定できるか、もしくは点と辺の数がそれぞれ高々 k^2+k と k^2 となるグラフ上の問題に帰着できることが知られている。この Buss and Goldsmith (1993)のカーネル化アルゴリズムに限らず、これまで頂点被覆問題に対する様々なカーネル化の手法が提案されてきた。本研究課題は、このような頂点被覆問題に対するカーネル化の深化の流れへの貢献を目指すものである。

本研究課題では、頂点被覆問題に対するカーネル化に関連する、以下の三つのテーマを中心に取り扱う。

【テーマ 1：頂点被覆問題に対するカーネル化における最低次数に関連する研究】

本研究課題の一つ目の研究テーマとして、頂点被覆問題に対するカーネル化における最低次数に関連する研究を行う。上で述べた Buss and Goldsmith (1993)のカーネル化アルゴリズムにおけるルール 1 は、点の次数の観点から眺めると次数 0 の点を取り除くということになり、このルールの適用後は最低次数が 1 以上となる。最低次数の大きなカーネルを求めることは、固定パラメータ容易性という分野におけるアルゴリズム開発と密接に関係しており重要な問題であることが知られている。本研究課題では一つ目のテーマとして、頂点被覆問題に対するカーネル化における最低次数に関連した研究を行う。

【テーマ 2：頂点被覆問題に対する近似カーネル化に関連する研究】

本研究課題の二つ目のテーマとして、頂点被覆問題に対する近似カーネル化に関連する研究を行う。通常カーネル化の研究においては、厳密な解を求めることができるサイズの小さい問題例への帰着を考える。しかし近年、近似アルゴリズムと厳密アルゴリズムの二つの方向性の融合として、より良い精度保証のある近似解を求めることができるサイズの小さい問題例への帰着を目指す近似カーネル化の研究が進められている。頂点被覆問題に対しても近似カーネル化の研究は進められており、本研究課題では二つ目のテーマとして、頂点被覆問題に対する近似カーネル化に関連した研究を行う。

【テーマ 3：頂点被覆問題の拡張に対するカーネル化に関連する研究】

本研究課題の三つ目の研究テーマとして、頂点被覆問題を拡張した問題に対するカーネル化に関連する研究を行う。上で述べたが、頂点被覆問題は基本的な離散最適化問題であるため、様々な拡張が考えられている。例えば、幾つかの点を取り除いて各点の次数をある値以下にする問題である Bounded-degree vertex deletion problem や、幾つかの点を取り除いて各連結成分のサイズをある値以下にする問題である Component order connectivity problem に対するカーネル化が研究されている。本研究課題では三つ目のテーマとして、これらの頂点被覆問題を拡張した問題に対するカーネル化に関連する研究を行う。

3. 研究の方法

本研究課題は基本的には理論的研究であり、上記で述べた三つのテーマに関して理論的な成果を挙げることを目標とする。具体的な研究の手順としては、まず上記の三つの研究テーマを中心に、周辺の研究に関する論文等を収集し、これらの論文を読むことにより必要な情報を集めることから開始する。そして、これらの論文調査等により得られた情報から、上記の三つのテーマに関して適切な問題を設定する。その後、申請者がこれまで研究を進めてきた離散最適化の理論に関する知識を用いて、設定した問題の解決を目指す。また、得られた成果は論文誌等に投稿することにより公開することを目指す。

4. 研究成果

本研究課題の一つ目の研究テーマである「頂点被覆問題に対するカーネル化における最低次数に関連した研究」に対して、以下の成果が得られた。

- Naoyuki Kamiyama
On Optimization Problems in Acyclic Hypergraphs
Information Processing Letters, 182:106390, 2023.

この論文においては、ハイパーグラフと呼ばれるグラフを一般化したものに対する最適化問題を扱っている。グラフの辺は二つの点で構成されるのに対して、ハイパーグラフにおいては辺が三つ以上の点から構成される可能性がある。このようなハイパーグラフ上の問題の中でも、上記の論文では特に Binary polynomial optimization problem と呼ばれる問題に着目して研究を行った。Binary polynomial optimization problem に対しては、Del Pia and Di Gregori (2022) が、 β -acyclic hypergraph と呼ばれるハイパーグラフ上では多項式時間で解けることを示した。上記の論文では、まず Binary polynomial optimization problem を一般化した問題を提案し、この一般化された問題が β -acyclic hypergraph 上では、Del Pia and Di Gregori (2022) のアルゴリズムを自然に拡張することにより多項式時間で解くことができることを示した。

本研究課題の二つ目のテーマである「重み付き頂点被覆問題に対する近似カーネル化に関連する研究」に対して、以下の成果が得られた。

- Naoyuki Kamiyama
A Note on Robust Subsets of Transversal Matroids
arXiv:2210.09534

この論文においては、Matroid-constrained maximum vertex cover problem と呼ばれる問題を扱っている。Matroid-constrained maximum vertex cover problem は Huang and Sellier (2022) によって提案されたものであり、無向グラフ G と各辺に重みを与える関数、そして G の点集合常に定義されたマトロイドが与えられたとき、与えられたマトロイドの独立集合となっている G の点部分集合の中で、接続する辺の重みの合計が最大となるものを求める問題である。Huang and Sellier (2022) は、この Matroid-constrained maximum vertex cover problem に対する近似カーネル化を扱っている。特に、制約が partition matroid, laminar matroid, transversal matroid と呼ばれるマトロイドのクラスに含まれる場合を扱い、マトロイドに対する robust subset と呼ばれる概念を用いた近似カーネル化の手法を提案している。上記の成果では、この Huang and Sellier (2022) によって示された transversal matroid に対する結果が、改良できることを示した。

本研究課題の三つ目のテーマである「頂点被覆問題を拡張した問題に対するカーネル化に関連する研究」に対して、以下の成果が得られた。

- Masataka Shirahashi and Naoyuki Kamiyama
Kernelization Algorithms for a Generalization of the Component Order Connectivity Problem
Journal of the Operations Research Society of Japan, 66(2):112-129, 2023.

この論文においては、頂点被覆問題を拡張した Component order connectivity problem と呼ばれる問題を、更に一般化した問題を提案し、その問題に対するカーネル化アルゴリズムを提案している。元となる Component order connectivity problem においては、無向グラフ G と二つの整数 k, l が与えられる。このとき、Component order connectivity problem の目的は、 G から k 個の点取り除くことによって、得られるグラフにおける各連結成分のサイズを l 以下にすることができるかを判定することである。もし l が 1 であればこの問題は頂点被覆問題に一致するため、この問題は頂点被覆問題の一般化になっていることがわかる。上記の論文では Component order connectivity problem に対するカーネル化アルゴリズムの中でも、特に Xiao (2017) によって提案されたカーネル化アルゴリズムに注目して研究を行った。上記の論文においては、まず Component order connectivity problem におけるサイズ条件を、劣加法性を満たす関数を用いた制約に一般化した問題を導入した。そして、上記の論文では、Xiao (2017) によって提案された Component order connectivity problem に対するカーネル化アルゴリズムを一般化することにより、この Component order connectivity problem を一般化した問題に対してカーネル化アルゴリズムが構築できることを示した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Masataka Shirahashi, Naoyuki Kamiyama	4. 巻 66(2)
2. 論文標題 Kernelization Algorithms for a Generalization of the Component Order Connectivity Problem	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Journal of the Operations Research Society of Japan	6. 最初と最後の頁 112-129
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.15807/jorsj.66.112	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Naoyuki Kamiyama	4. 巻 182
2. 論文標題 On Optimization Problems in Acyclic Hypergraphs	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Information Processing Letters	6. 最初と最後の頁 106390
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.ipl.2023.106390	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計1件（うち招待講演 0件 / うち国際学会 0件）

1. 発表者名 白橋正貴, 神山直之
2. 発表標題 Component Order Connectivity Problem の拡張に対するカーネル化
3. 学会等名 2021年度OR学会九州支部事業「九州地区における若手OR研究交流会」
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------