

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 5 年 6 月 26 日現在

機関番号：32665

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2020～2022

課題番号：20K11684

研究課題名(和文) グラフのサイクル構造を捉える新たな不変量の発見

研究課題名(英文) Discovery of new graph invariants to capture the cycle structure

研究代表者

齋藤 明 (SAITO, Akira)

日本大学・文理学部・教授

研究者番号：90186924

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：グラフにハミルトンサイクルが現れる予兆を数値的に捉える不変量を探った。2部グラフが一般のグラフよりも弱い次数和条件でハミルトンサイクルをもつことに着目し、一般のグラフ G が G の次数和の半分程度の次数和をもつ全域部分2部グラフをもつことを証明した。これは古典的な結果であるOreの定理とMoon-Moserの定理の間に密接な関係があることを示している。次に全域部分グラフの拡張概念として辺着色を調べた。グラフ H とその部分グラフ K について、十分な色数で辺着色された虹色 H -フリーグラフな完全グラフが虹色 K -フリーとなるための必要十分条件は、 K がスター、 H がその1点細分であることを証明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

ハミルトンサイクルは輸送網における効率的配送、符号の長周期巡回生成など幅広い応用をもつ一方、それ自体が多く理論的興味を引く研究対象である。しかし一般のグラフにハミルトンサイクルの存在を問う問題はNP-完全問題である。こうした状況において、ハミルトンサイクル発生の予兆を数値的に捉えることは、理論、応用の両面において知見を深める。全域2部グラフの観点からこの問題にアプローチした本研究は、問題に新たな視点を与え、また本研究の成果はこの視点の有効性を示す。また全域部分グラフを辺着色へと一般化する発想も従来なかったものであり、辺着色の分野に新たな研究の場を切り開く。

研究成果の概要(英文)：If a graph nearly satisfies a sharp sufficient condition for the existence of a hamiltonian cycle, there might be some sign suggesting that it is "almost" hamiltonian. In order to investigate this possibility, we studied the relationship between the degree sum of general graphs and that of its spanning bipartite subgraphs. We proved that a graph G of even order contains a spanning balanced bipartite subgraph H such that the degree sum of H is not less than approximately the half of the degree sum of G . It implies that an extended version of Moon-Moser Theorem is stronger than Ore's Theorem. We also proved the counterpart of this result for graphs of odd order. Next we considered edge-coloring as a generalization of spanning subgraphs. Let H be a connected graph and K be its subgraph. Then every rainbow H -free complete graph edge-colored in sufficiently many colors is rainbow K -free if and only if K is a star and H is its simple subdivision.

研究分野：グラフ理論

キーワード：ハミルトンサイクル サイクル 次数和 辺着色 虹色禁止部分グラフ

1. 研究開始当初の背景

グラフの全ての頂点を通るサイクルをそのグラフのハミルトンサイクルとよぶ。また与えられたグラフがハミルトンサイクルをもつとき、そのグラフはハミルトンであるという。与えられた一般のグラフがハミルトンであるか否かを判定する問題は NP-完全である。このような状況では、グラフがハミルトンであるための十分条件を探ることが研究の中心となる。

グラフのハミルトン性 (ハミルトンサイクルが存在するか否か) は次数に関連する不変量と相性が良いことが知られている。自然数 k に対し、 $\alpha(G) \geq k$ なるグラフについて

$$\sigma_k(G) = \min \left\{ \sum_{v \in S} \deg_G v \mid S \text{ は } G \text{ の独立集合、} |S| = k \right\}$$

と定める。Bondy [2] は位数 n の k -連結グラフが $\sigma_{k+1}(G) > \frac{1}{2}(k+1)(n-1)$ を満たせば、 G はハミルトンであることを示した。

ハミルトングラフは常に 2-連結であり、定理 A において $k=2$ とおけば、 $\sigma_3(G) > \frac{3}{2}(n-1)$ を満たす位数 n の 2-連結グラフはハミルトンであることが分かる。この結果は最良であり、5 以上の任意の奇数 n について、 $\sigma_3(G) = \frac{3}{2}(n-1)$ を満たす位数 n の 2-連結な非ハミルトングラフ G が存在する。一方が G が $\sigma_3(G) \geq n+2$ を満たすと、 G は以下のような振る舞いを示すことが知られていた。

- (A) G の最長サイクルは辺支配的である。すなわち最長サイクル C に属さない相異なる 2 頂点間に辺は存在しない。
- (B) G の最長サイクル C 上の頂点 x から C の外の頂点に向かって辺が出ていれば、 C 上で x に隣接する頂点から C の外の頂点に向かう辺は存在しない。

これらの性質はハミルトン性を研究する際にとっても便利であり、当時の研究者は性質 (A)、(B) はグラフがハミルトンになる予兆であると考えていた。しかしなぜこれらが「予兆」なのだろうか。当時の研究者はその理由を記述できずにいた。

そうした中にあり、本研究代表者は性質 (A)、(B) がハミルトンサイクル存在の予兆である理由を明確に記述する不変量を導入した。2-連結グラフ G に対して G の最長パスの位数を $p(G)$ 、最長サイクルの位数を $c(G)$ とおき、さらに $\text{diff}(G) = p(G) - c(G)$ とおく。定義より $\text{diff}(G) \geq 0$ であり、また連結グラフ G において、 G がハミルトンであることと $\text{diff}(G) = 0$ は同値である。本研究代表者ら [3] は以下の事実を証明した。

- (1) 位数 n の 2-連結グラフ G が $\sigma_3(G) \geq n+2$ を満たせば、 $\text{diff}(G) \leq 1$ である。
- (2) $\text{diff}(G) \leq 1$ を満たす 2-連結グラフ G は性質 (A)、(B) を満たす。

以上のようにグラフの次数和がハミルトンサイクル存在を保証する値にわずかに届かないときに、 $\text{diff}(G)$ がその予兆を捉える不変量となることが示された。しかし上記の結果は以下のような新たな疑問を生み出した。

- (1) 位数 n の 2-連結グラフ G について、 $\sigma_3(G) \geq n+2$ ならば $\text{diff}(G) \leq 1$ である。しかし実際に $\text{diff}(G) = 0$ が保証されるまでには $\sigma_3(G)$ の下界を $\frac{3}{2}(n-1)$ まで上げなければならない。

このギャップを埋めるような不変量はないか。

- (2) $\sigma_3(G) = n + 1$ を満たす位数 n の 2-連結グラフ G で $\text{diff}(G)$ の値が極めて大きくなるものが存在する。なぜ $\sigma_3(G)$ の下界の連続変化に対して $\text{diff}(G)$ の上界は連続変化しないのか。当時はこれらの疑問を解決することはできなかった。

2. 研究の目的

上記のような背景を踏まえ、本研究代表者は「1.研究開始当初の背景」の最後に挙げた間に答えることを本研究の目標とした。すなわち

- (1) $\sigma_3(G)$ の下界の連続変化に対応して $\text{diff}(G)$ の上界が連続的に変化する現象を観測できるような大きいグラフのクラスを見出し、一般のグラフで連続変化を阻む要因を探る。
(2) 見出された要因から、 $\text{diff}(G)$ よりも精密にハミルトン性の予兆をつかむ不変量を得る。という2点を目的とした。

3. 研究の方法

2つの部集合の位数が等しい2部グラフをバランスした2部グラフとよぶ。バランスした2部グラフでは一般のグラフよりもはるかに弱い次数和条件がハミルトンサイクルの存在が保証する。 X, Y を部集合にもつ2部グラフ G について、 $\sigma_{1,1}(G)$ を以下で定義する。

$$\sigma_{1,1}(G) = \min\{\deg_G u + \deg_G v \mid u \in X, v \in Y, uv \notin E(G)\}$$

すなわち次数和を異なる部集合に属する2頂点に限定して考える。Moon と Moser [5]は位数 n のバランスした2部グラフ G が $\sigma_{1,1}(G) \geq \frac{1}{2}n + 1$ を満たせば、 G はハミルトンであることを示した。

このように、2部グラフはサイクルの分布について一般のグラフよりも良い性質を示すことが多い。これらを踏まえて、以下の仮説を立てた。

仮説1 : 2部グラフ G に限定すれば、より小さい次数和が $\text{diff}(G) \leq 1$ を保証する。

仮説2 : 次数和が高い偶位数の一般のグラフは、次数和の高いバランスした全域2部グラフを含む。

仮説3 : 2部グラフにおいては、次数和の下界を連続的に変化させると $\text{diff}(G)$ の上界も連続的に変化する。

もしこれらの仮説が正しければ、偶位数の2-連結グラフ G について、まず仮説2に基づいて G から次数和があまり下がらないバランスした全域2部グラフ H を取り出し、仮説1、3を用いて $\text{diff}(H)$ と H の次数和の関係を調べ、最後に $\text{diff}(G)$ を $\text{diff}(H)$ で評価するという戦略が立てられる。そこで上記の仮説を予想に仕立て、それを証明することを試みた。

前段落で述べた「 G の全域部分グラフをとる」という操作は、辺着色の言葉で述べると「 G の辺を2色で塗り分ける（そして一方の色の辺だけで誘導される部分グラフをとる）」ということである。そこでもし前段落で述べた戦略が有効であれば、 G の辺を3色以上で塗り分け、所望のグラフを複数取り出すことができるかもしれない。この点を念頭に置き、辺着色に関する知見も集めた。

4. 研究成果

「3. 研究の方法」で述べた Moon-Moser の結果は最良である。しかし Ferrara, Jacobson and Powell [4] は type 1, type 2 とよばれる線形時間で判定可能なグラフのクラスを構成し、位数 n のバランスした 2 部グラフ H が $\sigma_{1,1}(H) \geq \frac{1}{2}n$ を満たせば、 H は type 1, type 2 に属するグラフであるか、またはハミルトンであることを証明した。

この結果を踏まえて、本研究代表者は研究を進め、偶位数 n のグラフ G が $\sigma_2(G) \geq n$ を満たせば、 G は $\sigma_{1,1}(H) \geq \frac{1}{2}n$ を満たしかつ type 1, type 2 には属さないバランスした全域 2 部グラフ H を含むことを証明した。

上記の結果は偶位数のグラフに限定される。そこで本研究代表者は奇位数のグラフ 2 部グラフについて Ferrara らの結果に対応する命題を証明し、それを本研究の枠組みに落とし込むことを試みた。グラフ G の全ての頂点を通るパスを G のハミルトンパスとよぶ。2 部グラフ H の 2 つの部集合の位数の差が 1 であるとき、 H は「ほぼバランスしている」とよぶ。ほぼバランスしている 2 部グラフの大きい方の部集合の任意の相異なる 2 頂点について、それらを端点とする H のハミルトンパスが存在するとき、 H は準ハミルトン連結であるという。

本研究代表者は、Ferrara らが Moon-Moser の定理を拡張したアプローチと同様に type 1', type 2' とよぶ線形時間で判定できる小さいグラフのクラスを構成した上で、位数 n のほぼバランスしている 2 部グラフ H について、もし H が $\sigma_{1,1}(H) \geq \frac{1}{2}(n+1)$ を満たしており、かつクラス type 1', type 2' に属していなければ、 H は準ハミルトン連結であることを証明した。さらに、5 以上の任意の奇数 n と位数 n のグラフ G について、 G が $\sigma_2(G) \geq n$ を満たせば、 G には $\sigma_{1,1}(H) \geq \frac{1}{2}(n+1)$ を満たすほぼバランスした全域 2 部グラフ H が存在すること、さらに H の大きい方の部集合 X について、 X の中に G で隣接している 2 頂点 x_1, x_2 が存在するようにできることを証明した。

続いて本研究代表者は、より一般的な辺着色されたグラフの知見を集めた。グラフ H および H の辺着色 $c : E(H) \rightarrow \mathbf{N}$ の組を辺着色されたグラフとよび、 (H, c) と表す (\mathbf{N} は自然数全体の成す集合)。 (H, c) の各辺の色が全て異なっているとき、 H は虹色であるという。そして連結グラフ H について、 G が H に同形な虹色部分グラフを含まないとき、 (G, c) は虹色 H -フリーであるという。虹色 H -フリーなグラフは現在盛んに研究されており、これらを虹色禁止部分グラフの研究とよぶ。虹色禁止部分グラフの研究では、補グラフの辺に新たな 1 色を与えることにより、台となるグラフ G を完全グラフに限定することが多い。

連結グラフ H_1, H_2 について、 H_1, H_2 だけで決まるある定数 N が存在して、 N 色以上の色数で虹色 H_1 -フリーに辺着色された完全グラフが常に虹色 H_2 -フリーとなるとき、 $H_1 \leq H_2$ と表す。

自然数を頂点にもつ有限グラフの集合上で、この 2 項関係 \leq は前順序となる。また H_1 が H_2 の部分集合であるとき、 $H_1 \subseteq H_2$ と表すことにすると、 $H_1 \subseteq H_2$ ならば $H_1 \leq H_2$ である。一方辺着色グラフにおいては逆が成り立つことがある。 $K_{1,k}$ の 1 つの辺を 1 点細分して得られるグラフを $K_{1,k}^+$ と表す。Bass ら [1] は 5 色以上で辺着色された虹色 $K_{1,3}^+$ -フリーな完全グラフは虹色 $K_{1,3}$ -フリーであることを証明した。これは $K_{1,3}^+ \leq K_{1,3}$ を示している。この結果は、辺着色されていないグラフにおける禁止部分グラフの研究では考えられなかった奇妙な現象である。そこで本研究代表者は Bass らの結果を検討し、いつこのような現象が起こるのかを調べた。その結果 3 以上の任意の整数 k について、 $\frac{1}{2}k(k+1) + 1$ 色以上の色で辺着色された虹色 $K_{1,k}^+$ -フリーな完全グラフは虹色 $K_{1,k}$ -フリーであることを証明した。さらに位数 4 以上の

グラフ H, H' について、 $H' \subseteq H$ かつ $H \leq H'$ が成り立てば、 $H' = H$ であるかまたは3以上のある整数 k について $(H', H) = (K_{1,k}, K_{1,k}^+)$ であることを示した。

以上のように本研究は当初の目的について大きな成果を得ることができた。

参考文献

- [1] R. Bass, C. Magnant, K. Ozeki and B. Pyron, Characterizations of edge-colorings of complete graphs that forbid certain rainbow subgraphs, manuscript, (2015).
- [2] J.A. Bondy, Longest paths and cycles in graphs with high degree, Research Report CORR80-16, Department of Combinatorics and Optimization, University of Waterloo, Waterloo, Ontario, Canada(1980).
- [3] H. Enomoto, J. van den Heuvel, A. Kaneko and A. Saito, Relative length of long paths and cycles in graphs with large degree sums, Journal of Graph Theory **20** (1995), 213-225.
- [4] M.J. Ferrara, M.S. Jacobson and J. Powell, Characterizing degree-sum maximal nonhamiltonian bipartite graphs, Discrete Mathematics **312** (2012), 459-461.
- [5] J.W. Moon and L. Moser, On hamiltonian bipartite graphs, Israel Journal of Mathematics **1** (1963), 163-165.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計10件（うち査読付論文 10件 / うち国際共著 6件 / うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 S. Degawa and A. Saito	4. 巻 333
2. 論文標題 A note on secure domination in C5-free graphs	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Discrete Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 82-83
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.dam.2023.03.016	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 H.Z.Q. Chen, S. Kitaev and A. Saito	4. 巻 42
2. 論文標題 Representing split graphs by words	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Discussiones Mathematicae Graph Theory	6. 最初と最後の頁 1263-1280
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.7151/dmgt.2344	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Q. Cui, Q. Liu, C. Magnant and A. Saito	4. 巻 344
2. 論文標題 Implications in rainbow forbidden subgraphs	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Discrete Mathematics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.disc.2020.112267	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 R.E.L. Aldred, J. Fujisawa and A. Saito	4. 巻 37
2. 論文標題 Distance matching extension in cubic bipartite graphs	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Graphs and Combinatorics	6. 最初と最後の頁 1793-1806
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00373-021-02295-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 S. Chiba, M. Tsugaki, A. Saito and T. Yamashita	4. 巻 37
2. 論文標題 Spanning bipartite subgraphs with large degree sum in graphs of odd order	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Graphs and Combinatorics	6. 最初と最後の頁 1841-1858
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00373-021-02349-y	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 R.E.L. Aldred, J. Fujisawa and A. Saito	4. 巻 90
2. 論文標題 Pairs and triples of forbidden subgraphs and the existence of a 2-factor	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Graph Theory	6. 最初と最後の頁 61-82
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1002/jgt.22368	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 R.E.L. Aldred, J. Fujisawa and A. Saito	4. 巻 93
2. 論文標題 Distance matching extension and local structure of graphs	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Graph Theory	6. 最初と最後の頁 5-20
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1002/jgt.22465	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 G. Chen, S. Chiba, R. Gould, X. Gu, M. Tsugaki, A. Saito and T. Yamashita	4. 巻 343
2. 論文標題 Spanning bipartite graphs with large degree sum in graphs	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Discrete Mathematics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.disc.2019.111663	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 S. Kitaev and A. Saito	4. 巻 343
2. 論文標題 On semi-transitive orientability of Kneser graphs and their complements	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Discrete Mathematics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.disc.2020.111909	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 H. Liu, C. Magnant, I. Schiermeyer, A. Saito and Y. Shi	4. 巻 94
2. 論文標題 Gallai-Ramsey number for K_4	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Graph Theory	6. 最初と最後の頁 192-205
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1002/jgt.22514	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

[学会発表] 計6件 (うち招待講演 3件 / うち国際学会 3件)

1. 発表者名 斎藤 明
2. 発表標題 安全支配数に関する2つの上界
3. 学会等名 日本数学会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 斎藤 明
2. 発表標題 Relative length of triangle-free graphs
3. 学会等名 日本数学会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 斎藤 明
2. 発表標題 Secure domination in C_5 -free graphs
3. 学会等名 日本数学会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Akira Saito
2. 発表標題 Implications in rainbow forbidden subgraphs
3. 学会等名 SIAM Conference on Discrete Mathematics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Akira Saito
2. 発表標題 Implications in rainbow forbidden subgraphs
3. 学会等名 Combinatorics Today, Lecture Series (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 A. Saito
2. 発表標題 Application of graph coloring to agent scheduling and re-scheduling
3. 学会等名 2020 5th. International Conference on Knowledge Engineering and Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------