

令和 6 年 5 月 1 日現在

機関番号：62603

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2020～2023

課題番号：20K11697

研究課題名（和文）離散凸解析による資源配分問題の研究

研究課題名（英文）Research on resource allocation problems by discrete convex analysis

研究代表者

室田 一雄（Murota, Kazuo）

統計数理研究所・大学統計教員育成センター・特任教授

研究者番号：50134466

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,300,000円

研究成果の概要（和文）：「離散凸解析」は、凸関数と離散構造と併せて考察する最適化の理論であり、連続世界の凸解析に匹敵する理論を離散世界に構築することを目標として提唱された、連続と離散を繋ぐパラダイムである。本研究課題では、離散凸解析の双対理論を軸に据えて、M凸集合（整数基多面体の整数点の集合）、M2凸集合（2つの整数基多面体の共通部分の整数点の集合）、整数ネットワークフロー、整数劣モジュラフローなどの離散構造の上の離散資源の公平配分問題に関する理論とアルゴリズムを構築した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

離散凸解析は、最適化において「連続と離散を繋ぐパラダイム」であり、様々な分野で別々に考察されてきた数学的な構造を、分野を越えて理解して、相互に利用するための枠組みである。離散凸解析の理論やアルゴリズムが一般的な形で整理されることによって、コンピュータ科学、オペレーションズ・リサーチ、経済学、ゲーム理論、数学などの様々な分野での共通の言葉やアプローチが生まれ、学問諸分野の交流が可能となる。さらには、その共通の知識に基づいて、様々な応用が繋がって発展していくことが期待される。

研究成果の概要（英文）：Discrete Convex Analysis is a theory of optimization that connects continuous optimization and discrete optimization by establishing a general framework for discrete optimization comparable to the conventional convex analysis in the continuous setting. In this research project we aimed at developing a general framework for discrete resource allocation problems on the basis of the duality theory in discrete convex analysis. We have obtained theoretical results and algorithms for discrete structures such as M-convex sets (sets of integer points in an integral base polyhedron), M2-convex sets (sets of integer points in the intersection two integral base polyhedra), integral network flows, and integral submodular flows.

研究分野：数理工学

キーワード：離散凸解析 最適化理論 数理工学 情報基礎 アルゴリズム 経済理論

様式 C-19、F-19-1、Z-19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

藤重悟氏による辞書式最適基の論文(1980年)により、資源が連続量の場合の公平な配分に関する基礎理論が確立されている。この成果は、最小ノルム点問題や劣モジュラ関数最小化問題とも密接に関連し、基多面体の重要な性質を抽出したものとなっている。アルゴリズムの観点からも、強多項式アルゴリズムが知られており、連続変数の場合はすべての事柄が解明済と言える。しかし、藤重氏の著書にも注意されているように、この理論の離散版(配分されるべき資源が整数ベクトルで表される場合)は、その後、40年近く手つかずの状態が続いており、研究代表者もこの点については問題意識をもっていた。一方、オペレーションズ・リサーチの資源配分問題の分野においては、徐々に離散凸解析の有用性が認識されてきた。例えば、Handbook of Combinatorial Optimization に収録されているサーベイ論文“Resource allocation problems”では、1998年の第1版(N. Katoh, T. Ibaraki)の離散変数問題に関する結果は、2013年の第2版(N. Katoh, A. Shioura, T. Ibaraki)では離散凸解析の立場から再整理されている。このような状況をみて、研究代表者は、離散凸解析の資源配分問題への更なる応用可能性について関心をもっていた。本研究の着想を得た直接の契機は、コンピュータの負荷分散の問題が、グラフの公平な向き付け問題に定式化され、その問題が美しい数学的構造をもつという Borradaile らの結果(G. Borradaile, J. Iglesias, T. Migler, A. Ochoa, G. Wilfong, L. Zhang: Egalitarian graph orientations, Journal of Graph Algorithms and Applications, Vol. 21, 2017)である。

2. 研究の目的

本研究の目的は、離散凸解析の双対理論を軸に据えて、離散資源の公平配分問題に関する理論とアルゴリズムを構築することである。コンピュータの負荷分散や、グラフ理論における向き付け問題、経済学・ゲーム理論における不可分財の公平配分など様々な文脈において個別の成果が得られているが、離散凸解析に基づく一般的な枠組を作ることによって、様々な分野を繋ぐことができる。これによって、離散凸解析の特徴である「分野横断性」をより発展させることができる。

3. 研究の方法

本研究課題においては、研究代表者個人による研究と研究協力者との討論が中心的な研究方法である。研究体制は、代表者の他に、研究協力者として、Andras Frank 氏、田村明久氏、森口聡子氏、土村展之氏、の4名を加え、さらに共同研究者として、塩浦昭義氏、高澤兼二郎氏の協力も得ることとなった。

研究の第1段階として、離散資源の公平配分問題が離散凸関数の最小化問題として定式化できるであろうという見通しに従い、急増加分離凸関数の概念を用いて離散資源の公平配分問題が凸関数の最小化問題の形に定式化できることを示した。次の段階として、離散凸解析の双対理論が有用であろうという着想に従い、整凸集合上の分離凸関数の最小化に関する Fenchel 型双対定理を見出し、双対最適解の構造を明らかにした。これによって、 M 凸集合だけでなく、基多面体の交差集合、ネットワークフロー、劣モジュラフローなど、様々な離散構造の上で、公平配分問題を扱える可能性が生まれた。以上のような大局的な理解を踏まえて、第3段階として、それぞれの離散構造に適したアルゴリズムを設計した。

4. 研究成果

(1) [M 凸集合上の公平資源配分問題]

M 凸集合上の辞書式最適化問題に関して、その構造を解明する諸定理を与えた。とくに、辞書式最適解の全体がマトロイド構造をもつという定理と台集合が一意的に分解されるという正準分割の定理が重要である。さらに、離散変数の辞書式最適基を強多項式時間で求めるアルゴリズムを与え、グラフ理論における連結性問題への応用を詳細に論じた。(Andras Frank 氏との共同研究)

(2) [M 凸集合上と基多面体上の公平資源配分問題の関係性]

M 凸集合上の辞書式最適化問題は、基多面体上の辞書式最適化問題において、変数に整数制約を課した問題と位置付けることができる。基多面体上の問題については、1980年頃に構造定理やアルゴリズムを含む包括的な理論が構築されている。これに関して詳細な文献調査を行い、連続変数の場合と離散変数の場合の構造定理とアルゴ

リズムの比較を行い、離散変数理論と連続変数理論の構造的な対応関係を解明した。これにより、基多面体上の資源公平配分問題に関する理論とアルゴリズムの全体像が明確となった。(Andras Frank 氏との共同研究)

(3) [公平なネットワークフロー]

ネットワーク上の整数フローの公平配分問題に対して、劣モジュラ被覆の理論を用いることによって、公平フローの特徴づけと公平フローを効率よく計算するアルゴリズムを開発した。さらに、より一般的問題設定として、劣モジュラ制約をもつネットワークフローを扱った。従来知られていた線形関数を目的関数とする劣モジュラ制約フロー問題の解法と整合する形で、公平配分の成す集合の記述と効率的なアルゴリズムを設計した。(Andras Frank 氏との共同研究)

(4) [完全双対整数性をもつ離散凸集合上の分離凸関数に関する最大最小定理]

離散凸解析に基づいて離散資源の公平配分問題を扱う際に中心的な役割を果たす事実は、離散凸集合上の変数分離凸関数に対する離散双対定理である。既存の成果は、離散凸集合として、 M 凸集合、 L 凸集合などを個別に対象とする集合体であったが、本研究においては、完全双対整数性をもつ整数多面体を対象とする統一的な離散双対定理を与えた。この定理は、離散資源の公平配分問題に応用できるものであるが、より高い視点からみると、離散凸解析と多面体的組合せ論を繋ぐ重要な成果である。(Andras Frank 氏との共同研究)

(5) [整凸関数と分離凸関数の双対定理と整凸関数の諸性質]

整凸関数と分離凸関数の和に関する Fenchel 型最大最小定理を見出した。この定理は、離散凸解析の根幹を進歩させる重要な成果であるが、資源公平配分問題に対しても重要な意味をもっている。実際、この定理を用いることにより、 M 凸集合やネットワークフローに対して得られていた資源公平配分問題の構造的な結果を、整凸集合上の資源公平配分問題へと一般化することができる。整凸関数に関して、研究代表者の最近数年間の研究によって得られた結果（近接定理、整数劣勾配の存在、双共役性定理、分離凸関数との和に関する最大最小定理など）を含む長編のサーベイ論文を執筆した。このサーベイ論文は Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics の 40 周年記念号に掲載された。(田村明久氏との共同研究)

(6) [離散凸概念の包含・交差関係]

離散凸解析においては、 M 凸関数、 L 凸関数を始めとして、様々な離散凸関数の概念があり、離散凸関数のそれぞれの概念に対応して、離散凸集合の概念が定義されている。本研究では、離散凸関数と離散凸集合のクラスの間になり立つ包含関係と交差関係を網羅的に整理した。これによって、様々な分野の研究者が離散凸関数の概念を容易に理解できるようになると期待される。マルチモジュラ集合は L^{\sharp} 凸集合から座標変換によって得られるという意味で L^{\sharp} 凸集合と等価であるが、一方、2次元空間においてはマルチモジュラ性と M^{\sharp} 凸性は一致することが知られていた。本研究により、高次元の空間におけるマルチモジュラ性と M^{\sharp} 凸性の関係性が明らかとなった。(森口聡子氏との共同研究)

(7) [$L2$ 凸集合の不等式表現]

離散凸集合の凸包を不等式系で記述することは、離散最適化の定石的手法である多面体的アプローチの出発点となる。離散凸解析においては、 M 凸集合、 $M2$ 凸集合（2つの M 凸集合の共通部分）、 L 凸集合、マルチモジュラ集合については、対応する不等式系の特徴が知られていたが、 $L2$ 凸集合（2つの L 凸集合のミンコフスキー和）については未知であった。本研究では、不等式系に対する変数消去の手法（Fourier–Motzkin の方法）を用いて $L2$ 凸集合の凸包を記述する不等式系を導出した。また、同じ結果に対して、共役性定理と M 凸交差定理を組合せた構造的な手法による別証明を与えた。(森口聡子氏との共同研究)

(8) [ジャンプシステム上の M 凸関数]

ジャンプシステム上の M 凸関数の概念は、グラフのマッチングや多項式の安定性解析などに利用されてきたが、マッチング問題への応用においてはその概念を幾分拡張することが必要であることが、高澤兼二郎氏によって指摘されていた。本研究では、これに整合する形でジャンプシステム上の M 凸関数の概念を拡張するとともに、この拡張が元の概念と本質的に等価であることを意味する定理を与えた。これによって、ジャンプシステム上にも M^{\sharp} 凸関数にあたる概念が定義されたことになる。

(9) [双ブランディング]

有向グラフ上の双ブランディング問題に関連して、高澤兼二郎氏によって、付値マトロイドの構造の存在が指摘されていた。一方、標準的な多面体的組合せ論においては、線形計画問題とその整数性という形で双ブランディング

問題の組合せ論的性質を理解する。本研究では、この二つのアプローチの関係を Benders 分解を通じて明らかにした。(高澤兼二郎氏との共同研究)

(10) [基本演算の整理]

離散凸解析においては、 M 凸関数、 L 凸関数、整凸関数、マルチモジユラ関数など、種々の関数クラスが考察されるが、それぞれの関数クラスにおいて許容される演算は異なり、連続変数とは異なる注意が必要である。変数のスケーリングや関数の和といった基本演算、および、ネットワークによる変換に関する演算に関して、それぞれの関数クラスに許容される演算を網羅的に調べた。このような網羅的整理によって、様々な分野の研究者が離散凸解析を利用する際に有用な情報を提供した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計13件（うち査読付論文 13件 / うち国際共著 6件 / うちオープンアクセス 4件）

1. 著者名 A. Frank, K. Murota	4. 巻 320
2. 論文標題 Fair integral submodular flows	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Discrete Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 416 ~ 434
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.dam.2022.06.015	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 A. Frank, K. Murota	4. 巻 40
2. 論文標題 Decreasing minimization on base-polyhedra: Relation between discrete and continuous cases	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 183 ~ 221
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s13160-022-00511-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 S. Moriguchi, K. Murota	4. 巻 40
2. 論文標題 Note on the polyhedral description of the Minkowski sum of two L-convex sets	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 223 ~ 263
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s13160-022-00512-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 A. Frank, K. Murota	4. 巻 195
2. 論文標題 Decreasing minimization on M-convex sets: Background and structures	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Mathematical Programming	6. 最初と最後の頁 977 ~ 1025
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10107-021-01722-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 A. Frank, K. Murota	4. 巻 195
2. 論文標題 Decreasing minimization on M-convex sets: Algorithms and applications	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Mathematical Programming	6. 最初と最後の頁 1027 ~ 1068
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10107-021-01711-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 K. Murota, A. Tamura	4. 巻 39
2. 論文標題 Discrete Fenchel duality for a pair of integrally convex and separable convex functions	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 599 ~ 630
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s13160-022-00499-x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 K. Murota	4. 巻 36
2. 論文標題 On basic operations related to network induction of discrete convex functions	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Optimization Methods and Software	6. 最初と最後の頁 472 ~ 518
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1080/10556788.2020.1818080	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 K. Murota	4. 巻 289
2. 論文標題 A note on M-convex functions on jump systems	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Discrete Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 492 ~ 502
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.dam.2020.09.019	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 K. Murota, K. Takazawa	4. 巻 38
2. 論文標題 Relationship of two formulations for shortest bibranchings	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 141 ~ 161
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s13160-020-00432-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 A. Frank, K. Murota	4. 巻 47
2. 論文標題 A discrete convex min-max formula for box-TDI polyhedra	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Mathematics of Operations Research	6. 最初と最後の頁 1026 ~ 1047
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 S. Moriguchi, K. Murota	4. 巻 66
2. 論文標題 Inclusion and intersection relations between fundamental classes of discrete convex functions	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Journal of the Operations Research Society of Japan	6. 最初と最後の頁 187 ~ 217
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.15807/jorsj.66.187	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 A. Frank, K. Murota	4. 巻 48
2. 論文標題 Fair integral network flows	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Mathematics of Operations Research	6. 最初と最後の頁 1393 ~ 1422
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1287/moor.2022.1303	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 K. Murota, A. Tamura	4. 巻 40
2. 論文標題 Recent progress on integrally convex functions	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 1445 ~ 1499
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s13160-023-00589-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計8件 (うち招待講演 2件 / うち国際学会 1件)

1. 発表者名 森口聡子, 室田一雄
2. 発表標題 L2凸集合の多面体表現
3. 学会等名 日本オペレーションズ・リサーチ学会2022年秋季研究発表会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 室田一雄
2. 発表標題 離散凸解析の偶然と必然
3. 学会等名 日本オペレーションズ・リサーチ学会2021年秋季研究発表会 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 室田一雄, 田村明久
2. 発表標題 整凸関数と分離凸関数に対するFenchel 双対性
3. 学会等名 日本オペレーションズ・リサーチ学会2021年秋季研究発表会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 森口聡子, 室田一雄
2. 発表標題 離散凸関数の族に関する包含・交わり関係
3. 学会等名 日本オペレーションズ・リサーチ学会2021年秋季研究発表会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 K. Murota
2. 発表標題 Introduction to discrete convex functions
3. 学会等名 The 69-th Yunchou Qianli Forum lecture at Operations Research Society of China (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 K. Murota, A. Frank
2. 発表標題 Min-max formulas for separable discrete convex minimization on box-TDI polyhedra
3. 学会等名 日本オペレーションズ・リサーチ学会2021年春季研究発表会, 2-B-7
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 塩浦昭義, 室田 一雄
2. 発表標題 準M#凸関数の最小化に関する諸性質
3. 学会等名 京都大学数理解析研究所研究集会「数理最適化: 理論と実践」
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 塩浦昭義, 室田 一雄
2. 発表標題 準M# 凸関数の最小化について
3. 学会等名 電子情報通信学会コンピューテーション研究会
4. 発表年 2023年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

DCP (Discrete Convex Paradigm) http://cs.kwansei.ac.jp/~tutimura/DCP/

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	フランク アンドラーシュ (FRANK Andras)		
研究協力者	田村 明久 (TAMURA Akihisa)		
研究協力者	森口 聡子 (MORIGUCHI Satoko)		

6. 研究組織（つづき）

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	土村 展之 (TSUCHIMURA Nobuyuki)		

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
ハンガリー	Eotvos大学			