

令和 5 年 5 月 21 日現在

機関番号：32665

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2020～2022

課題番号：20K11702

研究課題名(和文) ベイジアン情報不等式による有効性

研究課題名(英文) Efficiencies by Bayesian information inequalities

研究代表者

小池 健一 (KOIKE, Ken-ichi)

日本大学・商学部・教授

研究者番号：90260471

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文)：ベイズ推測において、2乗損失関数の下でのベイズリスクのvan Trees型、Borovkov-Sakhanenko型の下界について、漸近的な大小比較による評価を得ることができた(Koike(2020))。本研究の内容はAbu-Shanab and Veretennikov (2015)の結果を強化するものである。また、非正則な場合にも適用可能な差分型の下界を得ることができた(Koike and Hashimoto (2021))。さらに、下界の達成のための必要十分条件も得ることができた(Koike (2021)、Banno and Koike (2022))。

研究成果の学術的意義や社会的意義

ベイズ推測では、ベイズリスクを用いて推定量の良さの評価を考える。ベイズリスクの評価を与える下界にはvan Trees (1968)やBorovkov and Sakhanenko(1980)によるものがよく知られている。これらの不等式の評価の良し悪しを検討した。また、これらの不等式において等号が成り立つための条件を示した。これらのことから、ベイズ推測において推測方式の有効性評価の際にどの不等式を用いるべきかを見極めることができる。

研究成果の概要(英文)：In Bayesian inference, asymptotic large and small comparisons were obtained for the van Trees-type and the Borovkov-Sakhanenko type lower bounds for Bayesian risk under quadratic loss function(Koike (2020)). The content of this research reinforces the results of Abu-Shanab and Veretennikov (2015). We also obtained a lower bound of difference type applicable to the non-singular case (Koike and Hashimoto (2021)). Furthermore, the necessary and sufficient conditions for achieving the lower bounds were also obtained (Koike (2021), Banno and Koike (2022)).

研究分野：数理統計学

キーワード：ベイズ推測 ベイズリスク ベイジアン情報不等式 有効性

### 1. 研究開始当初の背景

統計的推測理論において、誤差のある観測からパラメータを推測する際、平均二乗誤差の値を用いた推定誤差の評価が良く行われている。特に、パラメータが確率変数であるベイズ推測では、平均二乗誤差をパラメータに関して期待値をとったベイズリスクを用いて評価することが多い。しかし、多重積分を計算するベイズリスクの計算には困難を伴うことが多い。このような場合、ベイズリスクの下界はパラメータ推測における推測の限界を調べるのに役立つ、特定の推定量のパフォーマンスを評価することに用いることができる。

これに対して、一般に漸近分散を最小にするという意味で最尤推定量が最適であることが知られている。従って、「最尤推定量を使えば良いであろうし、その評価は漸近分散で行えば良い」という理論もあり得るが、分散の極限と漸近分散は一般には一致しない。すなわち、漸近分散から導かれる漸近リスクを最小にしていると考えて最尤推定量を採用しても、実際に得る推定量のリスクとは全く異なる可能性がある。実際のベイズリスクと漸近分散との間には乖離があるかもしれない。我々が本当に評価すべきなのは実際のベイズリスクなので、この乖離は大きな問題である。また、最尤推定量を用いることは、ベイズ推測の特徴である事前情報を全く無視してしまうことになり、ベイズ推測の立場からは現実的ではない。

### 2. 研究の目的

(1) ベイズリスクを評価するクラメール・ラオ型の不等式が、これまでに数多く提案されている。不等式で与えられる複数の下界を比較した場合、大きい値の下界の方がより良い下界である。どの下界が良いものなのか、また、どこまで下界が改良できるかは未知の部分が多い。

(2) 古典的統計学(頻度主義による統計学)における、クラメール・ラオ型の不等式においては、下界の達成に対する必要十分条件がよく知られている。下界を達成する推定量を有効推定量という。下界の達成を調べることは、どのようなときに有効となるか、どのようなときに限るかを決定づけることになり、推定量の構成の際にも役立つ。これは古典的統計学での重要な定理となっている。その一方、ベイズ推測におけるクラメール・ラオ型の不等式においては、等号達成条件はほとんど分かっていない(極めて厳しい条件下で達成する例が数例知られているのみである)。どのような場合に有効になるのかを知ることはベイズ推測における有効性に関する重要な事項である。

### 3. 研究の方法

(1) ベイズリスクを評価するクラメール・ラオ型の複数の不等式を比較すると、特定のサンプルサイズに対しては一般的には優劣はつかない。そこで、サンプルサイズを大きくすることで、評価式を漸近展開し、その主要項を比較する。それによって、漸近的な優劣がつくことが期待される。また、Gill and Levit(1995)で与えられている不等式において、漸近的に最適な不等式を得ることができる。また、具体的にデータの確率分布や事前分布を与えたときにはどれくらいの評価式に差異があるかは、計算機による数値計算で比較する。

(2) ベイズリスクの下界を与える評価式の達成に対する必要十分条件については、参考となる文献がほとんど存在しないので、頻度主義におけるクラメール・ラオ型の不等式の達成に関する条件を参考に研究を進める。

#### 4 . 研究成果

(1) ベイズリスクのvan Trees型 ,Borovkov-Sakhanenko型の下界について ,漸近的な大小比較による評価を得ることができた (Koike (2020)) .本研究の内容はAbu-Shanab and Veretennikov (2015)の結果を強化するものである .この論文では ,多次元版の漸近比較も行い ,Gill and Levit (1995)の下界における漸近的に最適な下界を示した .応用例として ,攪乱母数を持つ場合の下界を示した .また、非正則な場合にも適用可能な差分型の下界を得ることができた (Koike and Hashimoto (2021)) .

(2) ベイズリスクの下界を与える評価式の達成に対しては ,データの分布が指数型分布族で ,事前分布が共役事前分布または Jeffreys の事前分布の場合に ,van Trees の下界や Borovkov-Sakhanenko の下界の達成のための必要十分条件を得ることができた (Koike (2021)) .伴野, 小池 (2022)では ,データの分布として指数型分布族のエスコート分布を考え ,事前分布として共役事前分布または Jeffreys の事前分布の場合に ,van Trees の下界や Borovkov-Sakhanenko の下界の達成のための必要十分条件を得ることができた .ベイズリスクの下界を与える評価式の達成に対する必要十分条件については ,これまではほとんど未知であったので ,有効性を議論するための足掛かりとなった .

#### ( 参考文献 )

Abu-Shanab, R., and Veretennikov. A.Y. 2015. On asymptotic Borovkov-Sakhanenko inequality with unbounded parameter set. *Theory of Probability and Mathematical Statistics* 90:1-12.

伴野創志, 小池健一 2022. Attainments of the Bayesian information bounds for the escort distribution. *数理解析研究所講究録*, 2221, 1-13.

Gill, R. D., and Levit, B. Y. 1995. Applications of the van Trees inequality: A Bayesian Cramer-Rao bound. *Bernoulli* 1 :1/2, 59-79.

Koike, K. 2021. Attainments of the Bayesian information bounds. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 50:11, 2696-2709.

Koike, K. 2020. Asymptotic comparison of some Bayesian information bounds. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 51:3, 599-609.

Koike, K, and Hashimoto, S. 2021. Improvement of Bobrovsky-Mayor-Wolf-Zakai bound. *Entropy*, 23, 161.

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Koike Ken-ichi	4. 巻 51
2. 論文標題 Asymptotic comparison of some Bayesian information bounds	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Communications in Statistics - Theory and Methods	6. 最初と最後の頁 599 ~ 609
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1080/03610926.2020.1752722	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 伴野創志, 小池健一	4. 巻 2221
2. 論文標題 Attainments of the Bayesian information bounds for the escort distribution	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 1-13
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Koike Ken-ichi, Hashimoto Shintaro	4. 巻 23
2. 論文標題 Improvement of Bobrovsky-Mayor-Wolf-Zakai Bound	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Entropy	6. 最初と最後の頁 161 ~ 161
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3390/e23020161	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Koike Ken-ichi	4. 巻 50
2. 論文標題 Attainments of the Bayesian information bounds	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Communications in Statistics - Theory and Methods	6. 最初と最後の頁 2696 ~ 2709
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1080/03610926.2019.1676445	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計2件（うち招待講演 0件 / うち国際学会 0件）

1. 発表者名 小池健一, 橋本真太郎
2. 発表標題 Bobrovsky-Mayor-Wolf-Zakaiの下界の改良
3. 学会等名 日本数学会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 伴野創志, 小池健一
2. 発表標題 エスコート分布の次数に対するベイズ情報不等式の達成について
3. 学会等名 RIMS 共同研究（グループ 型A）による研究会「ベイズ法と統計的推測」
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 赤平昌文, 小池健一	4. 発行年 2022年
2. 出版社 共立出版	5. 総ページ数 214
3. 書名 統計的逐次推定論	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	橋本 真太郎  (HASHIMOTO Shintaro)  (60772796)	広島大学・先進理工系科学研究科(理)・准教授    (15401)	

6. 研究組織（つづき）

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	赤平 昌文  (AKAHIRA Masafumi)  (70017424)	筑波大学・数理物質系（名誉教授）・名誉教授    (12102)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関