

令和 6 年 6 月 1 日現在

機関番号：14301

研究種目：若手研究

研究期間：2020～2023

課題番号：20K14284

研究課題名（和文）数論幾何学におけるコホモロジーの研究

研究課題名（英文）Study of cohomology in arithmetic geometry

研究代表者

越川 皓永（Koshikawa, Teruhisa）

京都大学・数理解析研究所・助教

研究者番号：10791452

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,300,000円

研究成果の概要（和文）：数論幾何学とは幾何的な視点を用いて整数論を研究する分野である。本研究課題ではコホモロジーと呼ばれる不変量を中心に調べた。例えば、志村多様体と呼ばれる整数論的に重要である幾何的対象について、コホモロジーのある部分が0になるという定理を証明した。これには整数論的応用（Langlands対応）があることが知られている。また、K3曲面の自己積という興味深い幾何的対象について、Tate予想や標準予想という古くから知られている問題で貢献した。さらに、素数 $p$ に特化したコホモロジーの理論である $p$ 進Hodge理論において、近年導入されたプリズマティックコホモロジーの対数版を導入し、その基礎理論を構築した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

志村多様体では予期されていなかった成果を挙げるとともに、FarguesとScholzeとの局所Langlands対応の幾何化プログラムとの関係性を指摘することとなり、国際的にも大変な反響を得た。 $p$ 進Hodge理論では対数的プリズマティックコホモロジーの基礎理論を構築し、国内外の研究者からもすでに用いられる理論となった。また、K3曲面に関する特別な場合のみであるが、古くから重要視されている代数幾何の予想について貢献することができた。これらの成果は学術的意義も十分にあると考えられるだけでなく、現在あるいは今後の国内外での研究を促進するような成果であったといえる。

研究成果の概要（英文）：Arithmetic geometry is a research area where geometric perspective is used to study number theory. In this research, I mainly studied invariants called cohomology. For example, we prove a result that certain parts of the cohomology of Shimura varieties, which are important geometric objects in number theory, vanish. It has application to number theory such as Langlands correspondence. I also contributed to classically known problems like the Tate conjecture, the standard conjecture in the case of self-products of so-called K3 surfaces, an interesting class of geometric objects. Moreover, I worked on the  $p$ -adic Hodge theory, which is a theory specialized for a fixed prime number  $p$ . I introduced a logarithmic version of prismatic cohomology, which was found rather recently, and developed the foundation.

研究分野：数論

キーワード：数論幾何学 コホモロジー 志村多様体 Langlands対応  $p$ 進Hodge理論 対数的幾何学 プリズマティックコホモロジー K3曲面

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

(1)  $p$  進体上の多様体のコホモロジーの進展が Scholze のパーフェクトイド空間の導入により加速していた。特に、コホモロジーの整構造を調べる整  $p$  進 Hodge 理論がその幾何的側面を中心にさらに進展していた。Bhatt と Scholze が、Morrow との共同研究で Ainf コホモロジーを調べた後に、その再解釈を含むプリズマティックコホモロジーという画期的な新理論を発表した。それにより、さらなる進展や応用が非常に期待される状況であった。

(2) Caraiani と Scholze が志村多様体の捩れ係数コホモロジーの Hecke 作用が一般的な部分についての消滅定理を証明した。Galois 表現の保型性の問題に応用があることが既に分かっており、重要な結果であることが認識されていた。また、関連する研究を Boyer が Harris と Taylor が一般線型群の局所 Langlands 対応を証明する際に用いた志村多様体に対して行っていた。

(3) 伊藤和広氏、伊藤哲史氏との共同研究として、 $K3$  曲面の自己積の Tate 予想を証明する論文をプレプリントとして公開した。

### 2. 研究の目的

(1) 整  $p$  進 Hodge 理論について研究する。

整  $p$  進 Hodge 理論については以前から研究しており、それらに引き続き Bhatt と Scholze の理論を半安定的還元の場合に一般化する。

多様体間の射が与えられている、いわゆる相対版について研究する。

プリズマティックコホモロジーの応用を研究する。

(2) 志村多様体の捩れ係数コホモロジーについて、Caraiani と Scholze の結果のさらなる一般化を証明する。

(3)  $K3$  曲面について、引き続き研究を行い、さらなる結果を得る。

### 3. 研究の方法

(1) 対数的幾何学を用いたプリズマティックコホモロジーの一般化を行う。半安定還元の状態においては、対数的幾何学の枠組みで扱えば、滑らかな多様体のように調べられるということが知られている。実際、プリズマティックコホモロジーの雛形的ものであるクリスタリンコホモロジーについてはその対数版が研究されていた。これらを基に、プリズマティックコホモロジーの対数版を導入する。また、係数理論や相対版についても関連する研究が多数あり、それらを参考に研究を行う。トポスのファイバー積を用いるというのがアイデアの一つである。

(2) 志村多様体のコホモロジーについては、Boyer の関連する結果と Caraiani と Scholze の結果との関係を理解する。また、Scholze の導入したダイヤモンドの理論を用いることにより Hodge-Tate 周期写像の行き先である旗多様体に定まっている部分空間についてコホモロジーを考えることができるので、それを用いて解析する。

(3)  $K3$  曲面について行ってきた研究ではその延長線上の結果として見込める結果があったため、それを研究する。

### 4. 研究成果

(1)  $p$  進 Hodge 理論

まず、重要なステップとして対数的幾何学の枠組みにおけるプリズマティックコホモロジーの一般化として適切であろう定義(特に対数プリズムの概念)を発見した。その定義とそれが適切な定義であることを正当化できたといえるであろう最低限の理論部分を論文 Logarithmic prismatic cohomology I にまずまとめた。特に、半安定還元の場合に Breuil-Kisin 加群の幾何学的実現といえるコホモロジーを構成したといえる。

その後、Zijian Yao 氏との共同研究で、さらなる結果を得ることができ、それらを論文 Logarithmic prismatic cohomology II にまとめた。その他のコホモロジー(クリスタリンコホモロジー、de Rham コホモロジー、Kummer エタールコホモロジー)との様々な比較定理が、定数係数の場合には、これらの論文でほぼすべて証明することができたといえる。その他、Nygard

フィルトレーションについても調べた。

これらの対数版の理論は既に国内外の研究者らにも用いられているようになっている。基礎理論を構築したことにはインパクトがあり、学術的意義があったといえる。

プリズマティックコホモロジーに関しては、対数的でない場合にも様々な進展(例えば、Poincare 双対性や Bhatt, Lurie, Drinfled らによるスタックを用いた解釈、係数理論等々)がある。それらに合わせて対数版の理論でも同様の進展が期待され、少しずつ研究を進めている。今後さらなる研究が行われることが国際的なレベルで期待できる。

また、Ildar Gaisin 氏との共同研究でプリズマティックコホモロジーの前身である Ainf-cohomology についてその相対化を考え、論文 Relative Ainf-cohomology としてまとめた。

### (2) 志村多様体のコホモロジーの消滅定理

Caraiani と Scholze の証明した志村多様体のコホモロジーの消滅定理は様々な技術的仮定が課されていた。これらの多くの部分を、Fargues-Scholze による局所 Langlands 予想の幾何化に関する結果を用いることで取り除くことでできた。これは当初予想していなかった大変画期的な成果である。その研究において局所志村多様体のコホモロジーの消滅定理も得た。これらの消滅定理について、この研究ではいままでと別のアプローチを提示しており、消滅定理が何故成立するかをより明らかにした成果といえ、国際的にも大変反響があった。

これらの結果は論文 On the generic part of the cohomology of local and global Shimura varieties にまとめた。この研究のさらなる一般化が海外の研究者らによりされ始めている。

関連する方向として、捩れ係数ではなく有理係数の場合ではあるが、Sug Woo Shin 氏との共同研究において、局所対称空間を含めた一般的な消滅定理を保型的手法で調べ始めている。また、圏論的局所 Langlands 予想を背景に、局所志村多様体について大変一般的な予想を定式化するに至り、今後の更なる進展が見込まれる。

一連の流れの中で、Alexander Bertolini Meli 氏と圏論的局所 Langlands 予想の接続層側を調べる共同研究も始めた。

また、上記研究の過程の中で、Fargues-Scholze による局所 Langlands 予想の幾何化に関する結果を用いることで Rapoport-Zink 空間をはじめとする局所志村多様体のコホモロジーの Weil 群作用についても研究した。

この結果は論文 Eichler-Shimura relations for local Shimura varieties にまとめた。この結果もすでに他の研究者により用いられている。

さらに、被覆群の場合に Fargues-Scholze の仕事を一般化するという共同研究を開始した。これは Tony Feng 氏、Gaisin 氏、今井直毅氏、Yifei Zhao 氏と共同のプロジェクトである。

### (3) K3 曲面の自己積について標準予想

伊藤和広氏、伊藤哲史氏との共同研究で Grothendieck らにより予想された Hodge 標準予想を K3 曲面の自己積の場合に証明することができた。Hodge 標準予想は最も重要な予想の一つであったが、長らく新しい結果がなかったため、貴重な結果が得られたといえる。

これらは論文 The Hodge standard conjecture for self-products of K3 surfaces にまとめた。

また、Hodge 標準予想の数値的版について、素数次元の単純アーベル多様体の自己積をはじめとする特別なアーベル多様体に対して結果を得た。

これは論文 The numerical Hodge standard conjecture for the square of a simple abelian variety of prime dimension にまとめ、出版された。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 3件）

1. 著者名 Koshikawa Teruhisa	4. 巻 173
2. 論文標題 The numerical Hodge standard conjecture for the square of a simple abelian variety of prime dimension	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 manuscripta mathematica	6. 最初と最後の頁 1161 ~ 1169
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00229-023-01482-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Koshikawa Teruhisa	4. 巻 8
2. 論文標題 Vanishing theorems for the mod $p$ cohomology of some simple Shimura varieties	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Forum of Mathematics, Sigma	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/fms.2020.36	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Ito Kazuhiro, Ito Tetsushi, Koshikawa Teruhisa	4. 巻 9
2. 論文標題 CM liftings of surfaces over finite fields and their applications to the Tate conjecture	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Forum of Mathematics, Sigma	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/fms.2021.24	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計15件（うち招待講演 14件/うち国際学会 11件）

1. 発表者名 越川皓永
2. 発表標題 Around logarithmic primsatic cohomology
3. 学会等名 IAS/Princeton Arithmetic Geometry Seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 越川皓永
2. 発表標題 Vanishing range beyond the generic case
3. 学会等名 Trimester Program, The Arithmetic of the Langlands Program, Trimester Seminar Series (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 越川皓永
2. 発表標題 Some computations in categorical local Langlands
3. 学会等名 Arithmetic and Cohomology of Algebraic Varieties 2023 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 越川皓永
2. 発表標題 志村多様体のコホモロジーの消滅定理
3. 学会等名 日本数学会2024年度年会 (招待講演)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 越川皓永
2. 発表標題 Vanishing theorems for local and global Shimura varieties
3. 学会等名 30e rencontres arithmetiques de Caen (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 越川皓永
2. 発表標題 Some cases of the Hodge standard conjecture
3. 学会等名 Franco-Asian Summer School on Arithmetic Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 越川皓永
2. 発表標題 On the cohomology of unitary Shimura varieties
3. 学会等名 Community-building in the Langlands Program (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 越川皓永
2. 発表標題 K3曲面の自己積のHodge標準予想
3. 学会等名 北海道大学数論セミナー
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 越川皓永
2. 発表標題 Logarithmic prismatic cohomology
3. 学会等名 p-adic cohomology and arithmetic geometry 2022 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 越川皓永
2. 発表標題 On the generic part of the cohomology of locally symmetric spaces
3. 学会等名 Mini-workshop on the geometrization of the local Langlands correspondences and related topics (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 越川皓永
2. 発表標題 Genericity and cohomology of locally symmetric spaces
3. 学会等名 Oberwolfach workshop, Arithmetic of Shimura varieties (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 越川皓永
2. 発表標題 Heights of pure motives
3. 学会等名 The Andre-Oort conjecture (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 越川皓永
2. 発表標題 ユニタリ型志村多様体のコホモロジーの消滅定理
3. 学会等名 金沢整数論オータムワークショップ2021 兼 北陸数論セミナー (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 越川皓永
2. 発表標題 Vanishing theorems for unitary Shimura varieties
3. 学会等名 KAIST Number Theory seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 越川皓永
2. 発表標題 Logarithmic prismatic site
3. 学会等名 Arithmetic geometry - Takeshi 60 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
米国	University of Chicago	University of California, Berkeley		
ドイツ	Universitat Munster	University of Bonn		