

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 6 年 6 月 24 日現在

機関番号：14301

研究種目：若手研究

研究期間：2020～2023

課題番号：20K14287

研究課題名（和文）明示的局所Langlands対応を用いたLanglands関手性の研究

研究課題名（英文）Study of the Langlands functoriality via an explicit local Langlands correspondence

研究代表者

大井 雅雄 (Oi, Masao)

京都大学・白眉センター・特定助教

研究者番号：40868171

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,200,000円

研究成果の概要（和文）：超尖点表現に対する局所Langlands対応およびLanglands関手性を、そのHarish-Chandra指標に注目することで調和解析の技術を用いて研究した。特に、toral型の超尖点表現に対する捻られた指標公式と捻られたエンドスコピー指標関係式を確立し、単純超尖点表現の場合には剰余標数に依存しない局所Langlands対応の精密な記述を与えた。また超尖点表現の指標による簡明な特徴付けも与えた。これらから派生する問題として、Galois表現のSwan導手の関手的な振る舞いに関する公式や、局所Langlands対応の幾何的観点からの新たな定式化などの成果も得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究で得られた局所Langlands対応の定式化に関する成果は、Langlands関手性に関連する諸問題の根本に関わるものである。またtoral型超尖点表現や単純超尖点表現に関する明示的局所Langlands対応に関する成果は、これまで知られていなかったクラスの具体例を、きわめて精密なレベルで与えるものである。これらを踏まえると、今回の研究成果は単なる興味深い結果には留まらず、今後Langlands関手性やより一般にp進簡約群の表現論に関する研究が分野として展開されてゆく中で、実用性を発揮すると期待している。

研究成果の概要（英文）：We studied the local Langlands correspondence and the Langlands functoriality for supercuspidal representations via harmonic analysis by noting the Harish-Chandra characters. In particular, we established the twisted character formula and the twisted endoscopic character relation for toral supercuspidal representations and obtained a precise description of the local Langlands correspondence for simple supercuspidal representations. We also established a simple characterization of supercuspidal representations in terms of Harish-Chandra characters. As related problems, we also studied the functorial behavior of Swan conductors of Galois representations and a new formulation of the local Langlands correspondence from a geometric perspective.

研究分野：整数論

キーワード：局所Langlands対応 Langlands関手性 正則超尖点表現 Harish-Chandra指標 エンドスコピー Swan導手

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

局所 Langlands 予想によると、 p 進簡約群の既約許容表現と Galois 表現の間には自然な関係(局所 Langlands 対応)が存在する。局所 Langlands 対応を用いれば、Galois 表現に関する種々の現象を p 進簡約群の表現に関する現象に翻訳することができ、そうした現象は Langlands 関手性と総称される。特殊な場合(エンドスコピー型)には Langlands 関手性を記述する理論が整っているが、一般の場合には先行研究すら殆ど存在せず、その正確な定式化の時点で既に謎に包まれている。

一方で近年では p 進簡約群の表現および Galois 表現のクラスを特殊なものに制限することで、局所 Langlands 対応を明示的に構成する試みが急速に進展している。明示的局所 Langlands 対応の理論はそれ自身が一つの到達点ではあるが、それを Langlands 関手性の解明に向けて応用する研究はまだあまり行われていない状況にあった。

2. 研究の目的

Langlands 関手性とは、相異なる二つの p 進簡約群 G と H が双対群を通して関連付いている場合に、 G と H の既約許容表現の間にも何らかの「自然な関係」があることを主張するものである。しかしそもそも Langlands 関手性の存在を裏付ける局所 Langlands 対応自体がまだ予想に過ぎず、そればかりか特徴付けも一般には定式化されていないため、「自然な関係」の定式化も知られていない。

本研究の目的は、正則超尖点表現と呼ばれるクラスの表現に対する明示的局所 Langlands 対応の理論を用いて Langlands 関手性の色々な具体例を実現し、それを根拠に Langlands 関手性の一般的な定式化(表現論的特徴付け)の妥当な候補を提示することであった。また、関連するより具体的な目標として、正則超尖点表現に対する Prasad の予想にも取り組む予定であった。

3. 研究の方法

エンドスコピー型の Langlands 関手性は、表現の(捻られた) Harish-Chandra 指標によって特徴付けられることが知られている。またエンドスコピー型を超えた場合にも、Harish-Chandra 指標を含む何かしらの等式によって、Langlands 関手性を定式化できる可能性が Langlands 自身によって示唆されていた。それを踏まえ本研究ではまず、正則超尖点表現の Harish-Chandra 指標およびその変種である捻られた Harish-Chandra 指標の明示公式を深く考察した。

Harish-Chandra 指標は既約許容表現を一意に決めてしまうという意味で 100%精密な不変量であるが、もう少し粗い不変量に注目して Langlands 関手性を考察するという方法も考えられる。そこで本研究では既約許容表現の深度および Galois 表現の導手と呼ばれる不変量たちに注目し、それらの関手的な振る舞いを調べた。

こうした研究を遂行する上では、国内外の研究集会に赴いて情報収集・成果発表をするともに、国外から研究者を招いての研究打ち合わせも積極的に行った。特に上述の Prasad の予想に関しては、まさに予定していた内容の研究が、研究実施期間中の 2022 年に Chuijia Wang 氏によって発表された。そこで Wang 氏に 3 ヶ月というまとまった期間京都大学に滞在していただき、Prasad の予想およびそこから派生する方向性について直接議論を行った。

4. 研究成果

(1) toral 超尖点表現捻られた指標公式の研究

「toral 型」と呼ばれるクラスの正則超尖点表現について、捻られた Harish-Chandra 指標の明示公式を与えた。通常の Harish-Chandra 指標に関しては、Adler-DeBacker-Spice による極めて精密な指標公式を与えられている。そこで Adler-DeBacker-Spice の証明の一つ一つを、「捻り」の影響を加味した調和解析の理論を用いて再構築する、というのが基本的な流れとなる。捻りの影響は Harish-Chandra の半単純降下の哲学によって、表現の深度 0 部分への寄与に集約される。この寄与は有限 Heisenberg-Weil 表現の捻られた指標として与えられ、それは最終的にルート系の分類に基づくケースバイケースの計算によって決定することができる。

捻られた指標公式を用いることで、Kaletha による正則超尖点表現の明示的局所 Langlands 対応が、toral 型の場合に、捻られたエンドスコピーの Langlands 関手性を特徴付ける関係式(捻られたエンドスコピー指標関係式)を満たすことを証明できた。このことから特に、Kaletha の局所 Langlands 対応が、古典群の場合には Arthur によって構成されていた局所 Langlands 対応と一致することが分かった。

この成果は既に論文としてまとめて個人ウェブサイトにて発表済みであるが、雑誌への投稿に向けて大幅な改訂を検討しており、現在その作業を進めている。

(2) 超尖点表現の Harish-Chandra 指標による特徴付けの研究

p 進簡約群の既約許容表現はその Harish-Chandra 指標によって特徴付けられる。しかし(1)で触れた Adler-DeBacker-Spice の指標公式からも観察できるように、表現の Harish-Chandra 指標は、 p 進簡約群のどのような元での値を考えるかに応じてきわめて複雑な形をとり得る。Harish-Chandra 指標の値を全て記述することで表現を決定する、ということは原理的には可能なのだが、このような理由からあまり現実的ではない。実際的な応用のためには、 p 進簡約群の元のクラスで、指標公式の形ができるだけ簡明になる程度には特殊であり、それと同時に、その指標値のみから元の表現を決定できる程度には一般的なものがあることが望まれる。

Michigan 大学の Charlotte Chan 氏と行った本研究では、超尖点表現の場合には、実際にそのような p 進簡約群の元のクラス(「very 正則半単純元」)が存在することを証明した。Adler-DeBacker-Spice の指標公式を注意深く調べることにより、この超尖点表現の指標による復元問題は、有限簡約群の Deligne-Lusztig 表現の指標による復元問題へと翻訳される。そこへ更に Deligne-Lusztig の指標公式も組み合わせることで、最終的には very 正則半単純元の単純な数え上げへと問題を帰着させることができる。

この研究は本来の研究計画の範疇には直接的には含まれないものであるが、本来の研究の方向性においても、またそこを外れても大きな意義を持っていると考えている。たとえば Langlands 関手性の特徴付けの指標関係式の研究においては、very 正則半単純元での値のみによって特徴付けを与えれば十分である、という可能性が示唆される。

この成果は既に論文としてまとめており、個人ウェブサイトおよび arXiv で既に発表済みである。また雑誌にも既に投稿済みであり、現在査読の返事を待っている段階である。

(3) 古典群の単純超尖点表現の明示的局所 Langlands 対応の研究

Kaletha による明示的局所 Langlands 対応の理論は多くの超尖点表現について適用可能であるが、 p 進体の剰余標数 p が簡約群のサイズに比べて小さすぎる場合はカバーできない。そのような例外的な場合においても Langlands 関手性の具体例を入手しておきたいという観点から、古典群の「単純超尖点表現」と呼ばれるクラスの表現について、局所 Langlands 対応および Langlands 関手性の明示的記述の問題に取り組むことにした。

この問題は、 p が奇数の場合には私の博士論文によって既に解決済みであったが、 p が 2 の場合は手付かずのまま残っていた。そこでパリ・サクレ大学(Guy Henniart 氏)と共同研究を実施し、まず斜交群の場合にこの問題を解決した。ここでもやはり指標の明示公式が解決の鍵となった。そして直交群の場合にも引き続き取り組んだ結果、ニューヨーク市立大学の Moshe Adrian 氏とバル・イラン大学の Eyal Kaplan 氏も共同研究者として加わり、計 4 人で共著論文を執筆する運びとなった。

これらの成果は既に個人ウェブサイトおよび arXiv で既に発表済みである。また雑誌にも既に投稿済みであり、現在査読の返事を待っている段階である。

(4) Swan 導手の関手的振る舞いについての研究

(3)で考察した単純超尖点表現は、Galois 表現の言葉では「導手が 1 の表現」として特徴付けることができる。この観点からの(3)の証明の一つの核心は、導手が 1 の Galois 表現が、関手的な操作(より具体的には 2 階外積および対称積)の下でどのような導手の Galois 表現に変化するのかを調べることにあった。そこで(3)から自然に派生する問として、より一般の Galois 表現の導手が関手的操作でどう変化するかを調べる、ということが考えられる。

Guy Henniart 氏のリードによって進められたこの共同研究では、まず p が奇数の場合に導手の変化を記述する明示的な公式を与えることができた。また p が 2 の場合には、導手の変化を抑える不等式を予想として定式化した。こちらの予想についてはまだ証明を与えるには至っていないものの、様々な場合での具体例を傍証として提示することができた。

この成果は既に査読を経て雑誌「Rad Hrvat. Akad. Znan. Umjet. Mat. Znan.」に掲載済みである。

(5) 局所 Langlands 対応の新たな定式化に関する研究

局所 Langlands 対応の定式化については現在でも未だに決定版が存在せず、様々な定式化が場面に応じて使い分けられているような状況にある。私は Michigan 大学の Alexander Bertoloni Meli 氏と局所 Langlands 対応の新たな定式化を提案した。この定式化は Fargues-Scholze による局所 Langlands 対応の幾何化(圏論的局所 Langlands 対応)の枠組みに着想を得たものである。私たちの定式化は、今後 Fargues-Scholze の理論の観点から Langlands 関手性の研究を進める上での鍵になると期待している。

この成果は既に個人ウェブサイトおよび arXiv で既に発表済みである。また雑誌にも既に投稿済みであり、現在査読の返事を待っている段階である。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 6件 / うち国際共著 3件 / うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Oi Masao, Sakamoto Ryotaro, Tamori Hiroyoshi	4. 巻 303
2. 論文標題 Iwahori-Hecke algebra and unramified local L-functions	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Mathematische Zeitschrift	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00209-023-03214-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Henniart Guy, Oi Masao	4. 巻 28
2. 論文標題 On Swan exponents of symmetric and exterior square Galois representations	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Rad Hrvatske akademije znanosti i umjetnosti. Matematičke znanosti	6. 最初と最後の頁 151 ~ 184
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.21857/yvjrdcde6y	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計20件（うち招待講演 17件 / うち国際学会 12件）

1. 発表者名 Masao Oi
2. 発表標題 Characterization of supercuspidal representations via Harish-Chandra characters
3. 学会等名 Representations and Characters: Revisiting Some Aspects of the Works of Harish-Chandra and Weil (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Masao Oi
2. 発表標題 Local Langlands correspondence for simple supercuspidal representations
3. 学会等名 Group, Lie and Number Theory (University of Michigan) (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Masao Oi
2. 発表標題 On $B(G)$ -parametrization of the local Langlands correspondence
3. 学会等名 Mini-workshop on the geometrization of the local Langlands correspondences and related topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Masao Oi
2. 発表標題 Swan conductors of local Galois representations and their functorial lifts
3. 学会等名 Number Theory in Tokyo (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Masao Oi
2. 発表標題 A characterizing result on supercuspidal representations
3. 学会等名 The 7th KTGU Mathematics Workshop for Young Researchers (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Masao Oi
2. 発表標題 On Iwahori-Hecke algebras and local L-factors of unramified representations
3. 学会等名 RIMS conference: Automorphic forms, automorphic L-functions, and its related topics (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Masao Oi
2. 発表標題 Several recent topics on the supercuspidal local Langlands correspondence
3. 学会等名 2021 Fall POSTECH-PMI Number Theory Seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Masao Oi
2. 発表標題 A recovering result of Deligne-Lusztig representations from their characters
3. 学会等名 The 3rd Kyoto-Hefei Workshop on Arithmetic Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Masao Oi
2. 発表標題 Comparison of algebraic and geometric constructions of supercuspidal representations
3. 学会等名 The 9th East Asia Number Theory Conference (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 大井雅雄
2. 発表標題 超尖点表現の代数的および幾何的構成の比較について
3. 学会等名 慶應代数セミナー (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Masao Oi
2. 発表標題 Geometric L-packets of Howe-unramified toral supercuspidal representations I
3. 学会等名 Automorphic Project & Research Seminar (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 大井雅雄
2. 発表標題 有限簡約群のDeligne-Lusztig表現の指標について
3. 学会等名 京都大学数論合同セミナー (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 大井雅雄
2. 発表標題 超尖点表現に対する局所Langlands対応について
3. 学会等名 第65回代数シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 大井雅雄
2. 発表標題 超尖点表現の代数的および幾何的構成の比較について
3. 学会等名 神戸整数論ミニワークショップ (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Masao Oi
2. 発表標題 Twisted endoscopic character relation for Kaletha's regular supercuspidal L-packets
3. 学会等名 MIT Lie Groups Seminar (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Masao Oi
2. 発表標題 Twisted endoscopic character relation for Kaletha's regular supercuspidal L-packets
3. 学会等名 RIMS研究集会「保型形式, 保型表現, ガロア表現とその周辺」(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Masao Oi
2. 発表標題 On explicit local Jacquet--Langlands correspondence for regular supercuspidal representations
3. 学会等名 The 5th Japan-Taiwan Number theory conference (招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Masao Oi
2. 発表標題 On explicit local Jacquet--Langlands correspondence for regular supercuspidal representations
3. 学会等名 Representations of reductive p-adic groups, L-functions and relative matters: a conference in honor of Guy Henniart (招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 大井雅雄
2. 発表標題 Characterization of supercuspidal representations via Harish-Chandra characters
3. 学会等名 RIMS研究集会「表現論とその周辺分野における最近の進展」
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 大井雅雄
2. 発表標題 Galois表現のSwan導手の関手的振る舞いについて
3. 学会等名 愛媛大学代数セミナー（オンライン）（招待講演）
4. 発表年 2023年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Masao Oi (大井雅雄) https://masaooi.github.io
--

6. 研究組織		
氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
フランス	Universite Paris-Saclay			
イスラエル	Bar Ilan University			
米国	Queens College	University of Michigan		