

令和 6 年 4 月 24 日現在

機関番号：17102

研究種目：若手研究

研究期間：2020～2023

課題番号：20K14292

研究課題名（和文）非正則モジュラー形式の視点を用いた実二次体の数論

研究課題名（英文）Number theory of real quadratic fields from the perspective of non-holomorphic modular forms

研究代表者

松坂 俊輝（Matsusaka, Toshiki）

九州大学・数理学研究院・助教

研究者番号：60868157

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,100,000円

研究成果の概要（和文）：モジュラー形式のサイクル積分という、解析的な文脈で80年以上前に導入された謎に満ちた対象を、近年の発展著しいモックモジュラー形式の理論を用いることで、数論やトポロジーの観点から研究し、その応用をいくつか与えた。例えば、楕円モジュラーj関数と呼ばれる数論の重要な関数に対して、そのサイクル積分自体は未だ性質の不明な複素数であるが、それを束ねた母関数のさらなるサイクル積分を考えると、ある2つの測地線が何回交差するかという幾何的な情報が得られるなど、意外にも思える結果を得ることができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

極めて古典的な対象であるにも関わらず、その数論的な役割が謎に包まれていた「サイクル積分」について、その数論的な側面に留まらず、トポロジーの研究との深い繋がりを見出せたことは、意外性もあり、今後の研究に大きな展望を与えるものである。また、モックモジュラー形式という、比較的新しく、また未だ国内に専門家が少なかった理論を積極的に導入して、その新たな応用を与えたことも、意義が大きいと考える。

研究成果の概要（英文）：We investigated a mysterious analytic object introduced over 80 years ago, known as the “cycle integrals” of modular forms, using the recent advancements in the theory of mock modular forms. Our perspectives on number theory and topology differ from the original motivation behind the notion of the cycle integrals. As a result, for instance, although the cycle integrals of the number-theoretical object called the elliptic modular j-function remain mysterious, we discovered that considering further cycle integrals of their generating function provides a geometric information, such as the number of intersections of a certain pair of geodesics.

研究分野：整数論

キーワード：モックモジュラー形式 双曲型アイゼンシュタイン級数 サイクル積分 Rademacher記号

## 様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

実二次無理数  $w$  に対するモジュラー形式  $f$  のサイクル積分とは、

$$\int_{C_w} f(z) Q_w(z, 1)^{k-1} dz$$

の形で定義される閉測地線  $C_w$  上の積分である。Hecke 由来の古典的な対象であるにもかかわらず、サイクル積分の持つ豊かな性質が明らかになってきたのは、ごく最近のことである。その契機となったのは、金子 (2009) および Duke-Imamoglu-Tóth (2011) によって独立に指摘された、楕円モジュラー  $j$  関数のサイクル積分と特異モジュライ (虚二次点での値) との間の興味深い類似性であった。

興味の対象となるのは、Hilbert が 1900 年に提出した 23 の問題のうちの一つ「類体 (代数体のアーベル拡大) の構成問題」である。これは基礎となる代数体が虚二次体の場合には、特異モジュライがその一端を担うものであるとして解決を果たしているが、その次に考えられるべき実二次体の場合ですら、類体を生成するような解析関数は見つかっておらず、Hilbert の期待する解答は得られていない状況である。

### 2. 研究の目的

上で指摘された類似性は、この世紀の難問に何らかの寄与を与えるだろうか。本研究では、この漠然とした問いの追究を一つのテーマとして掲げつつ、その先に広がるサイクル積分の数論という舞台を構築していくことを目的とする。当初の関連する、最近の研究として、Bengoechea-Imamoglu が、楕円モジュラー  $j$  関数のサイクル積分に関する金子の観察群・予想群の一部の定式化に成功し、証明を与えていた。さらに Duke らは、楕円モジュラー  $j$  関数のサイクル積分とモジュラー結び目と呼ばれるトポロジックな対象の間に、興味深い発見を行っていた。本研究では、これらの示唆的な研究を手がかりに、様々なモジュラー形式に対するサイクル積分の理解を目指す。

### 3. 研究の方法

代表者はこれまでサイクル積分を数論的な立場から理解すべく、その手がかりをモックモジュラー形式の理論に求めて研究を行ってきた。当初の予定では、それまでに得ていた幾つかの観察・結果を元に、同様の方針で数論を主軸として研究を進めるつもりであった。しかし、2020 年のコロナ禍をきっかけに立ち上げた Friday Tea Time Zoom Seminar というオンラインセミナーを通して、数論とトポロジー両方の専門家と密接に議論を行える環境を構築できたため、当初計画では可能性の一つとして考えていたトポロジーとの関係も研究の主軸として、相互作用的に研究を推し進めることとした。

### 4. 研究成果

主要な 3 つの結果は以下のとおりである。

- (1) 三葉結び目  $K_{2,3}$  の補空間  $S^3 \setminus K_{2,3} \cong SL_2(\mathbb{R})/SL_2(\mathbb{Z})$  を考えるとき、実二次無理数の  $SL_2(\mathbb{Z})$ -同値類からある仕方でこの補空間に構成できる結び目 (モジュラー結び目という) と、三葉結び目  $K_{2,3}$  との絡み数が、Rademacher 記号という数論的な関数と一致する (Ghys, ICM2006)。本研究では、三角群に関するモックモジュラー形式を導入することで、Ghys の結果を任意のトラス結び目  $K_{p,q}$  に一般化することに成功した (with J. Ueki, Research in the Mathematical Sciences, 2023)。
- (2) 双曲型 Eisenstein 級数を独自に定義し、その Fourier 係数に楕円モジュラー  $j$  関数のサイクル積分が現れることを発見した。これは金子が「 $j$  関数の実二次点での “値” 」と呼んだ対象そのものである。さらに均質化サイクル積分を導入することで、Duke らとは異なる方法で、2 つのモジュラー結び目の間の絡み数 (双曲 Rademacher 記号) の明示的導出に成功した (Mathematische Annalen, 2024)。
- (3) 偽テータ関数の準モジュラー的拡張を導入することで、3 次元多様体の不変量である WRT 関数の保型変換を明示的に与え、系として (特別な場合に) Witten の漸近展開予想の別証明を与えた (with Y. Terashima, Communications in Mathematical Physics, 2024)。さらに葉廣級数の不連続性に関する問題について、偽テータ関数の保型形式的側面を用いることで、

一つの解答を与えることにも成功している (Springer PROMS, 2024+).

これらの結果は、保型形式を用いた数論とトポロジーの直接的な関係を示唆しており、「トポロジーが問題を提供し、保型形式の強力な武器を駆使して解決を目指す」という研究の一つの方向性を生み出すような、今後の発展が十分に期待されるものであると考える。

#### 参考文献

- [1] P. Bengoechea, Ö. Imamoglu, Cycle integrals of modular functions, Markov geodesics and a conjecture of Kaneko, *Algebra Number Theory* 13 (2019), no.4, 943-962.
- [2] W. Duke, Ö. Imamoglu, Á. Tóth, Cycle integrals of the  $j$ -function and mock modular forms, *Ann. of Math. (2)* 173 (2011), no.2, 947-981.
- [3] W. Duke, Ö. Imamoglu, Á. Tóth, Modular cocycles and linking numbers, *Duke Math. J.* 166 (2017), no.6, 1179-1210.
- [4] M. Kaneko, Observations on the 'values' of the elliptic modular function  $j(\tau)$  at real quadratics, *Kyushu J. Math.* 63 (2009), no.2, 353-364.

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計22件（うち査読付論文 15件 / うち国際共著 4件 / うちオープンアクセス 8件）

1. 著者名 Matsusaka Toshiki, Terashima Yuji	4. 巻 405
2. 論文標題 Modular Transformations of Homological Blocks for Seifert Fibered Homology 3-Spheres	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Communications in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 1-25
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00220-024-04939-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Matsusaka Toshiki, Shibukawa Genki	4. 巻 10
2. 論文標題 Curious congruences for cyclotomic polynomials II	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Research in Number Theory	6. 最初と最後の頁 1-9
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s40993-023-00489-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Rinnosuke Matsuhira, Toshiki Matsusaka, Koki Tsuchida	4. 巻 -
2. 論文標題 How long can k-Gobel sequences remain integers?	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 The American Mathematical Monthly	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Deng Yuqi, Kurimaru Riku, Matsusaka Toshiki	4. 巻 9
2. 論文標題 Arithmetic Dijkgraaf-Witten invariants for real quadratic fields, quadratic residue graphs, and density formulas	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Research in Number Theory	6. 最初と最後の頁 1-16
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s40993-023-00471-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 松坂俊輝	4. 巻 -
2. 論文標題 葉廣級数と偽テータ関数に関する余録	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 2023早稲田整数論研究会報告集	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 松坂俊輝	4. 巻 -
2. 論文標題 円分多項式に関する奇妙な合同式について	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 RIMS共同研究 (公開型) 「解析的整数論とその周辺」(2023), 数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Beata Benyi, Toshiki Matsusaka	4. 巻 Tome 34, 3
2. 論文標題 Combinatorial aspects of poly-Bernoulli polynomials and poly-Euler numebrs	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal de Theorie des Nombres de Bordeaux	6. 最初と最後の頁 917-939
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.5802/jtnb.1234	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Beata Benyi, Toshiki Matsusaka	4. 巻 vol 77, 1
2. 論文標題 Remarkable relations between the central binomial series, Eulerian polynomials, and poly-Bernoulli numbers, leading to Stephan's observation	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Kyushu Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 149-158
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2206/kyushujm.77.149	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Minoru Hirose, Toshiki Matsusaka, Ryutaro Sekigawa, Hyuga Yoshizaki	4. 巻 vol 29, 3
2. 論文標題 Bijective enumerations for symmetrized poly-Bernoulli polynomials	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 The Electronic Journal of Combinatorics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.37236/10598	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Toshiki Matsusaka, Jun Ueki	4. 巻 10, Article number 4
2. 論文標題 Modular knots, automorphic forms, and the Rademacher symbols for triangle groups	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Research in the Mathematical Sciences	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s40687-022-00366-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Toshiki Matsusaka	4. 巻 -
2. 論文標題 Hikami 's observations on unified WRT invariants and false theta functions	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 "Low dimensional topology and number theory" Springer Proceedings in Mathematics & Statistics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Toshiki Matsusaka	4. 巻 -
2. 論文標題 A hyperbolic analogue of the Rademacher symbol	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Mathematische Annalen	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00208-023-02588-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Toshiki Matsusaka	4. 巻 -
2. 論文標題 量子モジュラー形式とSeifert多様体に対するhomological blockの保型変換則	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 RIMS共同研究(公開型)「保型形式, 保型L関数とその周辺」(2022), 数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI(デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Toshiki Matsusaka	4. 巻 -
2. 論文標題 テータ関数の2つの様式「擬テータ」と「偽テータ」	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 第6回数理解新人セミナー報告集	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI(デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Toshiki Matsusaka	4. 巻 印刷中
2. 論文標題 Ramanujan's mock theta functions and mock modular forms (Japanese, survey)	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku Bessatsu, Algebraic Number Theory and Related Topics 2020	6. 最初と最後の頁 印刷中
掲載論文のDOI(デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Matsumoto Kohji, Matsusaka Toshiki, Tanackov Ilija	4. 巻 239
2. 論文標題 On the behavior of multiple zeta-functions with identical arguments on the real line	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Number Theory	6. 最初と最後の頁 151 ~ 182
掲載論文のDOI(デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jnt.2021.11.008	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Toshiki Matsusaka	4. 巻 -
2. 論文標題 三角群のモジュラー結び目に関するRademacher記号と2-コサイクルについて	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 研究集会「結び目の数理論」報告集	6. 最初と最後の頁 83--92
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Toshiki Matsusaka	4. 巻 -
2. 論文標題 三角群に関するRademacher記号とモジュラー結び目	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 第66回代数学シンポジウム報告集	6. 最初と最後の頁 275--292
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Toshiki Matsusaka	4. 巻 印刷中
2. 論文標題 多重Bernoulli数の組合せ的解釈とStephanの観察について	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 数理解析研究所講義録「解析的整数論とその周辺」	6. 最初と最後の頁 印刷中
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Toshiki Matsusaka	4. 巻 23
2. 論文標題 Symmetrized poly-Bernoulli numbers and combinatorics	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Integer Sequences	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Beata Benyi, Toshiki Matsusaka	4. 巻 28
2. 論文標題 On the Combinatorics of Symmetrized Poly-Bernoulli Bumpers	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 The Electronic Journal of Combinatorics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.37236/9743	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Toshiki Matsusaka, Kota Saito	4. 巻 -
2. 論文標題 Linear Diophantine equations in Piatetski-Shapiro sequences	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Acta Arithmetica	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計45件 (うち招待講演 33件 / うち国際学会 11件)

1. 発表者名 Toshiki Matsusaka
2. 発表標題 Discontinuity property of a certain Habiro series at roots of unity
3. 学会等名 International Seminar on Automorphic Forms (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Toshiki Matsusaka
2. 発表標題 Curious congruences for cyclotomic polynomials
3. 学会等名 RIMS共同研究 (公開型) 「解析的整数論とその周辺」 (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Toshiki Matsusaka
2. 発表標題 How long can k-Gobel sequences remain integers?
3. 学会等名 第149回日本数学会九州支部例会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Toshiki Matsusaka
2. 発表標題 双曲Rademacher記号
3. 学会等名 数論合同セミナー (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Toshiki Matsusaka
2. 発表標題 モックモジュラー形式と数論
3. 学会等名 数理談話会 (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Toshiki Matsusaka
2. 発表標題 Modular knots, automorphic forms, and the Rademacher symbols
3. 学会等名 2024 Workshop on Number Theory and Algebra (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 Toshiki Matsusaka
2. 発表標題 Tales of integers
3. 学会等名 2024 Workshop on Number Theory and Algebra (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 Toshiki Matsusaka
2. 発表標題 How long can k-Gobel sequences remain integers?
3. 学会等名 第17回ゼータ若手研究集会
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 Toshiki Matsusaka
2. 発表標題 Introduction to quantum modular forms & discontinuity property of Habiro series
3. 学会等名 Low dimensional topology and number theory XV (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 Toshiki Matsusaka
2. 発表標題 崩れた保型性を持つq-級数について
3. 学会等名 研究集会「q級数とその周辺」(招待講演)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 Toshiki Matsusaka
2. 発表標題 Kaneko's val function and a hyperbolic analogue of Rademacher's symbol
3. 学会等名 UNIST Number Theory Seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 Toshiki Matsusaka
2. 発表標題 Variations on a function of Rademacher
3. 学会等名 九大代数学セミナー (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Toshiki Matsusaka
2. 発表標題 モックモジュラー形式の理論および最近の進展について
3. 学会等名 2022年度八王子数論セミナー「モックテータ関数」
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Toshiki Matsusaka
2. 発表標題 フィールズ賞が分かってほしい～ほんの少しの理解を目指して 2022～
3. 学会等名 MathPower2022 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Toshiki Matsusaka
2. 発表標題 Piatetski-Shapiro列における不定方程式の解について
3. 学会等名 2022大分熊本整数論研究集会（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Toshiki Matsusaka
2. 発表標題 8次元球充填問題について
3. 学会等名 ウイנקあいちセミナー（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Toshiki Matsusaka
2. 発表標題 Rogers再訪: Baileyペアと偽テータ関数
3. 学会等名 第2回大分分数論研究集会（招待講演）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Toshiki Matsusaka
2. 発表標題 中央二項級数の負の整数点での値
3. 学会等名 第148回日本数学会九州支部例会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Toshiki Matsusaka
2. 発表標題 テータ関数の2つの様式「擬テータ」と「偽テータ」
3. 学会等名 第6回数理新人セミナー（招待講演）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Toshiki Matsusaka
2. 発表標題 Hikami 's observations on unified WRT invariants and false theta functions
3. 学会等名 Gauge Fields in Arithmetic, Topology&Physics（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Toshiki Matsusaka
2. 発表標題 Hikami 's observations on unified WRT invariants and false theta functions
3. 学会等名 2023早稲田整数論研究集会（招待講演）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Toshiki Matsusaka
2. 発表標題 Ramanujanのモックテータ関数とモックモジュラー形式について（サーベイ）
3. 学会等名 解析数論セミナー（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Toshiki Matsusaka
2. 発表標題 Stephan's observation on the central binomial series
3. 学会等名 九大多重ゼータセミナー（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Toshiki Matsusaka
2. 発表標題 Ramanujanのモックテータ関数とモックモジュラー形式について（サーベイ）
3. 学会等名 東北大学代数セミナー（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Toshiki Matsusaka
2. 発表標題 Triangle modular knots and Rademacher symbols
3. 学会等名 代数学シンポジウム（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Toshiki Matsusaka
2. 発表標題 多重Bernoulli数の組合せ論
3. 学会等名 2021大分整数論研究集会（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Toshiki Matsusaka
2. 発表標題 数の愛好家
3. 学会等名 若手研究者の今を知る「アカデミックフラッシュ」(招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Toshiki Matsusaka
2. 発表標題 中央二項級数に関するStephanの観察について
3. 学会等名 RIMS共同研究(公開型)「解析的整数論とその周辺」
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Toshiki Matsusaka
2. 発表標題 Bijective enumerations for symmetrized poly-Bernoulli polynomials
3. 学会等名 九大多重ゼータセミナー(招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Toshiki Matsusaka
2. 発表標題 Estermann zeta functions and cycle integrals
3. 学会等名 月例報告会(招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Toshiki Matsusaka
2. 発表標題 Extnsions of the combinatorics of poly-Bernoulli numbers
3. 学会等名 第56回関西多重ゼータ研究会 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Toshiki Matsusaka
2. 発表標題 Modular knots, automorphic forms, and the Rademacher symbols for triangle groups
3. 学会等名 NCTS Seminar on Number Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Toshiki Matsusaka
2. 発表標題 Modular transformation formulas for homological blocks
3. 学会等名 RIMS conference "Automorphic forms, automorphic L-functions and related topics" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Toshiki Matsusaka
2. 発表標題 Modular transformations of homological blocks for Seifert fibered homology 3-spheres
3. 学会等名 Low dimensional topology and number theory XIII (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Toshiki Matsusaka
2. 発表標題 Eisenstein series associated to binary quadratic forms
3. 学会等名 九大多重ゼータセミナー（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Toshiki Matsusaka
2. 発表標題 Rademacher 記号の双曲類似
3. 学会等名 第19回仙台広島整数論集会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Toshiki Matsusaka
2. 発表標題 アイゼンシュタイン級数の三幅対
3. 学会等名 日本数学会2020年度秋季総合分科会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Toshiki Matsusaka
2. 発表標題 トーラス結び目と三角群のモックモジュラー形式（植木潤氏との共同研究）
3. 学会等名 研究集会「東北結び目セミナー2020」
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Toshiki Matsusaka
2. 発表標題 Linking numbers and modular forms for the triangle groups (joint work with Jun Ueki)
3. 学会等名 Japan Europe Number Theory Exchange Seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Toshiki Matsusaka
2. 発表標題 Two analogues of the Rademacher symbol
3. 学会等名 International Seminar on Automorphic Forms (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Toshiki Matsusaka
2. 発表標題 対称化多重Bernoulli数の組合せ的解釈について (joint work with Beata Benyi)
3. 学会等名 津田塾大学整数論ワークショップ (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Toshiki Matsusaka
2. 発表標題 サイクル積分とモックモジュラー形式に関する最近の進展
3. 学会等名 RIMS共同研究 (公開型) 「代数的整数論とその周辺」2020 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Toshiki Matsusaka
2. 発表標題 三角群のモジュラー結び目に関するRademacher記号と2-コサイクル (joint work with Jun Ueki)
3. 学会等名 研究集会「結び目の数理III」
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Toshiki Matsusaka
2. 発表標題 On the combinatorics of symmetrized poly-Bernoulli numbers (joint work with Beata Benyi)
3. 学会等名 第14回ゼータ若手研究集会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Toshiki Matsusaka
2. 発表標題 Piatetski-Shapiro列における不定方程式の解について (joint work with Kota Saito)
3. 学会等名 九州代数的整数論2021春
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

<p>Toshiki Matsusaka  <a href="https://sites.google.com/site/tmatsusaka556/">https://sites.google.com/site/tmatsusaka556/</a>  Friday Tea Time Zoom Seminar  <a href="https://sites.google.com/view/fridayteatime/">https://sites.google.com/view/fridayteatime/</a></p>
--

## 6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

## 7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

## 8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
ハンガリー	University of Public Service			
セルビア	University of Novi Sad			