様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　６ 年　５ 月 １９ 日現在

機関番号：２４４０５
研究種目：若手研究
研究期間：2020～2023
課題番号：２０Ｋ１４３１３

研究課題名（和文）半正な正則直線束と複素力学系

研究課題名（英文）Semi-positive holomorphic line bundles and complex dynamics

研究代表者
小池　貴之（Koike, Takayuki）

大阪公立大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：３０７８４７０６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　3,200,000円

研究成果の概要（和文）：半正直線束に付随する，複素多様体内の幾何構造の決定，及びその応用に，従来の力学系的手法とは全く異なる手法に基づく手法によって成功した．直線束の半正性に基づく部分多様体近傍の力学系的性質（特に線形化問題）を主に扱い，まずは函数論的技術の活用により関連する成果を挙げた．その成果に代数幾何学的な視点を活かした正則葉層構造に関する複素微分幾何学的手法を適用することで，一般的・決定的な形で，研究当初の予想の解決に成功し，特に曲面に於いてその応用も得た．また同時並行的に，岡山大・上原崇人准教授との共同研究により，貼り合わせ構成による射影的K3曲面の実現可能性問題の解決も行った．

研究成果の学術的意義や社会的意義
本研究では，複素多様体の複素解析幾何学的構造の解明を行った．複素多様体は局所的に複素数によってパラメータ付けられる対象であり，多項式たちの共通ゼロ点集合の様な非常に基礎的かつ重要な幾何学的対象である．私の研究成果では，複素多様体研究に於いて金字塔ともいえる小平の埋め込み定理の深化にあたる結果を得ている．この成果は複素多様体の解析的・幾何学的構造の詳細を明らかにするものであり，複素多様体が登場する数学，延いては関連する数理科学全般に於ける学術的意義は大きい．また本研究成果により新たな射影的K3曲面の構成方法が判明したことに対しては，数理物理学的応用が大いに期待される．

研究成果の概要（英文）：We have succeeded in determining the geometric structure of complex manifolds associated with semi-positive line bundles and obtaining its applications by using a method based on a technique completely different from conventional dynamical approaches. We mainly deal with dynamical properties (especially linearization problems) on a neighborhood of submanifolds based on the semi-positivity of line bundles. First we obtained some results by applying techniques from the theory of several complex functions. By additionally applying differential geometrical techniques on holomorphic foliations from the viewpoint of algebraic geometry, we succeeded in obtaining an affirmative answer to the conjecture we have posed as a goal of this program, and also in obtaining its applications especially on complex surfaces. Concurrently, in collaboration with Takato Uehara at Okayama University, we have solved the realizability problem of projective K3 surfaces by our gluing construction.

研究分野：複素解析幾何学

キーワード：半正正則直線束　正則葉層構造

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１（共通）

１．研究開始当初の背景

本研究では当初より一貫して，複素多様体の複素解析幾何学的構造の解明を目標としてきた．複素多様体は局所的に複素数によってパラメータ付けられる対象であり，例えば(複素数係数/複素数値の) 多項式たちの共通ゼロ点集合の様な非常に基礎的かつ重要な幾何学的対象である．
私の研究の根底には，複素多様体 X の複素解析幾何学的構造を X 上の直線束(正確には正則直線束) と呼ばれる幾何学的対象に着目して調べる，という発想がある．直線束は階数 1 のベクトル束として定義される．例えば X の接束や余接束の行列式束などは重要な直線束の例たちである．直線束の正則切断は，その直線束に適当な意味で対応する因子(即ち，X の余次元 1 の解析的部分多様体たちが成すサイクル) に於いて適切な極や零を持つ有理型関数と見做せる．そのため，特に X 上の有理型関数たちの理解を通じて X の幾何を理解するという函数論的/代数幾何学的観点からは，この「直線束に着目して X の構造を研究する」という方針は正当性が高く有効である．
私の研究では，中でも，X 上の直線束の微分幾何学的性質と代数幾何学的性質との関係を理解することに重きを置く．ひな型となるのは，小平の埋め込み定理と呼ばれる定理である．これは，コンパクト複素多様体X 上の直線束L が正であることと，豊富であるということが同値であることを主張する定理である．ここで直線束 L が正であるとは，L に滑らかなエルミート計量であって曲率が各点で正定値なるものが存在することをいい，これは L の微分幾何学的な正値性条件であると説明できる．
一方で L が豊富であるとは，L の何回かの自己テンソル積に十分多くの正則切断が存在し，それらによって各二点も(正確には“無限に近い二点”をも) 適当な意味で区別することができることをいい，これは L の代数幾何学的な正値性条件であるといえる．この小平の埋め込み定理は L の微分幾何学正値性条件から，L の豊富性の定義から従う十分多くの切断たちを用いて X を射影空間に埋め込むことができることが従うことを含意する．この L の微分幾何学的正値性条件からの X の複素解析幾何学・代数幾何学的構造の理解を一般化・深化することこそが，本研究の当初よりの研究目的であった．

２．研究の目的

私の研究目的は，端的に述べれば，L が半正であるとき，即ちL に滑らかなエルミート計量であって曲率が各点で半正定値なるものが存在するときについて，小平の定理から従うような複素解析幾何学的・代数幾何学的構造の理解を目指すものである．
小平の埋め込み定理は数多くの複素(代数) 幾何学的状況に於いて複素多様体の研究上本質的な役割を果たしてきた．例えば小平・エンリケスの代数曲面の分類理論やそれに基づく高次元コンパクト複素多様体X の分類では，標準束 KX (余接束の行列式束) やその双対等の豊富性条件を基準として構築されているが，この種の分類理論の中での小平の埋め込み定理及びこれに類する主張・手法の役割は非常に大きい．
また豊富性の極限的な状況である代数幾何学的正値性である半豊富性も代数多様体の分類理論で重要な役割を果たす．例えば双有理幾何学に於けるアバンダンス予想に従えば，複素代数多様体の分類は標準因子が半豊富である場合にほぼ帰着される．
では，アバンダンス予想の証明や，又は具体的に与えられた複素多様体及びその上の直線束に対し,その半豊富性判定はどのように行うか．さらに言えば，直線束が半豊富でない場合には，どのようにその複素解析幾何学的構造を捉えればよいのか．これらの疑問に微分幾何学的・多変数函数論的視点から明快な答えを与えることが本研究の目的である．

３．研究の方法

研究の方法としては，半正直線束に対応する因子の近傍に関する多変数函数論的分類を行う．代数幾何学的に重要な多くのケースに於いて，主要な直線束はネフ(数値的半正) と呼ばれる正値性条件を満足する．私はこれまで，ネフ直線束がいつ半正になるのかどうかについての研究を行ってきた．またネフ直線束が半正でない例・状況を数多く構成し，それらの複素解析幾何学的状況の研究を行った．そこで私は，これまでの研究成果を踏まえつつ,より幾何学的重要度の高い半正の場合について，より微分幾何学的動機に即した形へと発展させ，(複素多様体がコンパクトなときばかりでなく，開であるときをも含めた) 構造定理を構築するという方策をとった．

４．研究成果

まず初年度は，従来のジーゲル型の線形化定理の手法とは全く異なる手法に基づく直線束の半正性に基づく部分多様体近傍の力学系的性質（特に線形化問題）を主に扱った．本研究テーマは単独研究の形で進めてきたものである．この年度はその序盤からコロナウイルス感染拡大の影響のため共同研究に大きな支障が出たため，この研究課題を予定よりも優先したものである．名古屋大学・大沢健夫名誉教授の助言の下，氏のハルトークス型拡張定理とレビ平坦超曲面に関する研究について学び，その中で得た知識と技術を活用することで，本事業申請時に一つの目標に据えていた予想の解決をいくつかの意義のあるクラスに於いて得ることができた．またこの結果は思わぬ応用を持つことも大沢名誉教授からの指摘により判明した．この結果は既に国際誌に掲載済みである．この成果を，主にオンライン講演の形で，本分野の主だった国内・国外セミナー・集会に於いて積極的に発表し．関連する情報収集と打ち合わせを行った．また文部科学省共同利用・共同研究「Grauert 理論と最近の複素幾何」を名古屋大学・大沢健夫名誉教授と共同で開催し，ここでも上記結果について講演を行い意見交換等行った．

二年度目にはまず，上記成果に，より代数幾何学的な視点を活かした正則葉層構造に関する複素微分幾何学的手法を適用することにより一般的・決定的でのこの予想の解決に成功した．この結果は申請時に予想し本研究に於いて推進してきた，半正直線束に付随して存在する葉層構造の研究の応用としての成果である側面が大きい．この結果は既に国際誌に掲載が決定している他,国際研究集会等に於いて口頭発表済みである．更に以前から推進してきていた岡山大・上原崇人准教授との共同研究も，この年度に大きく進展した．よりケーラー幾何学的な動機に基づいての葉層構造研究として行ってきた“貼り合わせ構成”により得られる K3 曲面に於けるリッチ平坦ケーラー計量に関する研究技法を転用することにより，貼り合わせ構成による射影的 K3 曲面の実現可能性問題にほぼ完全な形での解決を与えることに成功したのである．この結果についても既に国際誌で発表済みであり，また研究集会等に於いて口頭発表済みである．更にオンライン開催という形で，文部科学省共同利用・共同研究「射影的複素多様体の部分多様体と葉層」を開催した．

この時点で，本研究計画当初に計画していた予想の解決を，一般的・決定的な設定で成功していた．その 1～2 年度までは，(特に国際) 共同研究により推進を計画していた部分について，新型コロナウイルスの感染拡大に伴う影響が無視できず，特に対面での精密な打ち合わせが必要となる共同研究課題については（オンライン会議システム等の活用により可能な限り推進はしてきたもののやはり）問題が生じていた．そこで，コロナウイルスの状況の改善が見られた 3 年度目には，国外研究者との研究交流，特に上記の当該研究成果を広く国外の専門家（主にドイツ・フランスの研究グループ）向けに講演発表により伝え，同時にそれに対する意見・コメントや関連する最新の研究情報収集を多数行った．その成果は大きく，本研究の今後の発展の方向性の決定に大きな示唆が数多く得られた．また，その一環として必要性を見出した，上田の補題の L2 類似について，橋本義規氏との共同研究により成果も得た（国際誌に掲載が決定している）．またこの年度は文部科学省共同利用・共同研究の制度を活かし，国際研究集会「Young Mathematicians Workshop on Several Complex Variables 2022」の日本サテライト会場の開催に成功し，当該研究に関する議論だけでなく特に若手研究者の国際的研究交流に寄与できた他，1 月には本資金の活用により国際ワークショップの開催も実現した

4 年度目は以上の成果の集大成として，特に岡山大学・上原崇人氏との研究を整理しまとめ進めつつ，さらにそれらを踏まえた議論を国外研究者，特にニース・コートダジュール大学の Laurent Stolovitch 氏と行った．ニース・コートダジュール大学ではコロナ禍以前より計画されていた大規模国際集会が開催され，当該研究成果（内特に，法線束が平坦となるような部分多様体近傍におけるある種の正則葉層構造の存在と，その部分多様体が定める直線束の半正性との関係）についての講演を対面にて当該分野の研究者向けにその詳細も含め行うことができた．そこで行われた議論・意見交換により当該分野（特に標準形の理論に関連する複素解析幾何学）についての知見を広めることができ，今後の展望につなげられた．さらにこの機会に深められたニース・コートダジュール大学の研究者との研究協力関係は今後の自身の研究，延いては関連分野における日仏研究協力関係の強化の観点からも重大なものとなったと自負している．またこの最終年度はこれまでの研究成果の複素解析幾何学的応用として，トロイダル群と呼ばれる複素多様体に於いて知られていたコホモロジー群とある種の直線束の無理数論的条件との関係についての結果を，2 次元複素多様体に関してより一般の状況へと一般化することにも成功した（プレプリントとして発表済み）．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計4件（うち査読付論文　4件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　0件）

１．著者名 T. Koike, T. Uehara	４．巻 6
２．論文標題 A gluing construction of projective K3 surfaces	５．発行年 2022年
３．雑誌名 Epijournal de Geometrie Algebrique	６．最初と最後の頁 1--15
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.46298/epiga.2022.volume6.8504	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 T. Koike	４．巻 71
２．論文標題 Linearization of transition functions of a semi-positive line bundle along a certain submanifold	５．発行年 2021年
３．雑誌名 Ann. Inst. Fourier (Grenoble)	６．最初と最後の頁 2237-2271
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.5802/aif.3439	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 T. Koike	４．巻 online
２．論文標題 On the complement of a hypersurface with flat normal bundle which corresponds to a semipositive line bundle	５．発行年 2021年
３．雑誌名 Math. Ann.	６．最初と最後の頁 online
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00208-021-02199-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 G. Hosono, T. Koike	４．巻 Volume XXIX Facicle 1
２．論文標題 On minimal singular metrics of line bundles whose stable base loci admit holomorphic tubular neighborhoods	５．発行年 2020年
３．雑誌名 Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)	６．最初と最後の頁 149-175
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計12件（うち招待講演　9件／うち国際学会　5件）

１．発表者名 T. Koike
２．発表標題 Holomorphic foliation associated with a semi-positive class of numerical dimension one
３．学会等名 Complex Geometry and Dynamical Systems（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2022年

１．発表者名 T. Koike
２．発表標題 Projective K3 surfaces which contain Levi-flat hypersurfaces
３．学会等名 Complex Analytic Geometry（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2022年

１．発表者名 T. Koike
２．発表標題 Projective K3 surfaces which contain Levi-flat hypersurfaces
３．学会等名 葉層構造論シンポジウム（招待講演）
４．発表年 2022年

１．発表者名 T. Koike
２．発表標題 A gluing construction of projective K3 surfaces
３．学会等名 K3, Enriques Surfaces, and Related Topics（招待講演）
４．発表年 2023年

１．発表者名
T. Koike

２．発表標題
Semipositive line bundles and holomorphic foliations

３．学会等名
葉層構造シンポジウム（招待講演）

４．発表年
2021年

１．発表者名
T. Koike

２．発表標題
Semipositive line bundles and holomorphic foliations

３．学会等名
Dynamics, SCV and CR geometry（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2021年

１．発表者名
T. Koike

２．発表標題
Holomorphic foliation associated with a semi-positive class of numerical dimension one

３．学会等名
2021年度多変数関数論冬セミナー（招待講演）

４．発表年
2021年

１．発表者名
T. Koike

２．発表標題
Holomorphic foliation associated with a semi-positive class of numerical dimension one

３．学会等名
日本数学会年会

４．発表年
2021年

１．発表者名 T. Koike
２．発表標題 On the complement of a hypersurface with flat normal bundle which corresponds to a semipositive line bundle
３．学会等名 複素幾何シンポジウム(金沢) 2020（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2020年

１．発表者名 小池貴之
２．発表標題 半正直線束の変換関数の固定部分近傍における線形化について
３．学会等名 第63回 函数論シンポジウム（招待講演）
４．発表年 2020年

１．発表者名 T. Koike
２．発表標題 Linearization of transition functions of a semi-positive line bundle along a certain submanifold
３．学会等名 Grauert theory and recent complex geometry（国際学会）
４．発表年 2021年

１．発表者名 小池貴之
２．発表標題 半正直線束の変換関数の固定部分近傍における線形化について
３．学会等名 日本数学会年会函数論分科会
４．発表年 2021年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

https://tkoike.com/ ウェブサイト

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計1件

国際研究集会	開催年
1day workshop on dynamical systems and complex geometry	2023年～2023年

8．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関