

令和 6 年 6 月 19 日現在

機関番号：16101

研究種目：若手研究

研究期間：2020～2023

課題番号：20K14314

研究課題名（和文）離散曲面に対する正則表現公式とその連続極限の解析

研究課題名（英文）Holomorphic representations for discrete surfaces, and analysis on their continuous limit

研究代表者

安本 真士 (YASUMOTO, Masashi)

徳島大学・大学院社会産業理工学研究部（理工学域）・講師

研究者番号：70770543

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,300,000円

研究成果の概要（和文）：石鹸膜やシャボン玉を始めとする美しい形状は、正則表現公式によって構成されることが知られている。本研究課題では、離散曲面に対する正則表現公式を新たに導出し、その連続極限と漸近的振る舞いの解析について成果を得た。特に、従来の離散曲面に対する正則表現公式を可積分系のアプローチで統一的に導出でき（Mason Pember氏、Denis Polly氏との共同研究）、3次元ミンコフスキー空間内の離散平均曲率零曲面に現れる特異点の振る舞いと連続極限について新たな知見を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

コンピュータサイエンスの発展に伴い、従来の微分幾何を、離散的な土台の下で理論を再構築することが強く求められている。特定の曲率条件のもとでの離散曲面・半離散曲面は、様々な数学研究が交差する重要な研究対象であり、従来は3次元ユークリッド空間内の離散化された曲面を中心に研究されてきた。本研究課題では、必ずしも3次元ユークリッド空間とは限らない、より一般の空間内の離散曲面、半離散曲面の数学研究を整備し、種々の離散化された曲面の構成法を新たに導出した。さらに、その無限遠方の振る舞いや特異性を解析する基礎研究の第一歩を新たに発見し、さらに連続極限への収束性についても解析した。

研究成果の概要（英文）：It is known that beautiful shapes, such as soap films and soap bubbles, are obtained by certain holomorphic representation formulae. In this project, we derived new holomorphic representations representation formulae for discrete surfaces and achieved results in analyzing their continuous limits and asymptotic behavior. In particular, we were able to uniformly derive holomorphic representation formulae for discrete surfaces based on an integrable systems approach (in collaboration with Mason Pember and Denis Polly), and obtained new insights into the behavior and continuous limit of singularities appearing in discrete zero mean curvature surfaces in three-dimensional Minkowski space.

研究分野：離散微分幾何

キーワード：離散微分幾何 可積分系 特異点

様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

1. 研究開始当初の背景

連続的な場合、古典的によく研究されている3次元ユークリッド空間内の極小曲面や、3次元双曲空間内の平均曲率一定1曲面を始めとする、種々の曲面に対する正則関数を用いた構成法「正則表現公式」が、可積分系のアプローチで統一的に導出できることが示された (Pember, 2020年, Geom. Dedicata). その一方, Bobenko, Pinkall による3次元ユークリッド空間内の離散極小曲面 (Crelle, 1996年) や, 研究代表者による3次元ミンコフスキー空間内の離散極大曲面 (DGA, 2015年) にも, 正則表現公式が存在することが示されている. その一方, 連続的な場合には様々な曲面に対する正則表現公式が存在することが知られているにも関わらず, 離散的な場合には部分的に研究がなされているだけで, より広いクラスに理論を拡張できるかは知られていない. さらに, 正則表現公式によって構成された離散曲面が, 連続の対象への収束性については, 3次元ユークリッド空間内の離散極小曲面のみ解析されていた (Bobenko, Hoffmann, Springborn, Ann of Math, 2009年).

これらを踏まえると, 以下の問題が生じる.

- (1) より多くの離散曲面に対する正則表現公式を導出できるか?
- (2) 微分幾何的性質を持つ離散曲面が, 同様の微分幾何的性質を持つ曲面に収束するか?

2. 研究の目的

従来の研究では主に, 3次元ユークリッド空間を始めとする3次元リーマン空間型内の離散曲面論が展開されており, また研究代表者等のこれまでの研究によって, 離散曲面, 半離散曲面のいくつかの構成法が導出され, 構成された曲面に現れる特異点の解析が行われた. 近年, Burstall, Hertrich-Jeromin, Rossman (Nagoya Math J, 2018年) により, 3次元リーマン空間型, ローレンツ空間型内の離散曲面論が整備され, より具体的な離散曲面の構成・解析が次の課題となった. 本研究課題では, 主に以下の2点に焦点を当てて研究を行った.

- (1) 種々の離散曲面に対する正則表現公式の導出
- (2) これらの連続極限への収束性の解明

具体的には以下を解明することを目的とした.

Pemberの研究を参考にし, 可積分系のアプローチを用いた, 従来のWeierstrass型の表現公式を統一的に導出できるか? これまでに得られたWeierstrass型の表現公式を包括的に導出できるだけでなく, 新たな離散曲面を構成出来ることが期待される. 研究代表者等の先行研究を参考にし (DGA, 2017年), 離散曲面に対するラックス対を導入し, ラックス対の解を離散正則関数から構成出来るか? これにより, 離散曲面を構成出来るようになるだけでなく, 対応する離散可積分方程式の幾何学的求積法を導出出来ることが期待される.

正則関数のローレンツ版である「パラ正則関数」を用いることで, 時間的曲面の構成法を導出できるか? パラ正則関数は正則関数とは異なる性質が現れることから, 離散パラ正則関数, およびこれによって構成される離散曲面の性質は, 従来とは異なる性質が現れることが期待される.

構成された離散曲面に対して, 一方のパラメータだけ連続極限を考えると, 同じ微分幾何的性質, 特に同じ曲率条件を持つ半離散曲面に収束するか? この目的を達成するには, 半離散曲面論を新たに構築する必要がある, また収束性については, 研究代表者等による種々の離散化された極小回転面について解析した結果を参照し, 連続極限の収束性を調べる.

上記の結果と併せて, 構成された離散曲面・半離散曲面の連続極限を解析する.

3. 研究の方法

上記の目的を達成するために, 主に本研究課題に関係する海外共同研究者と共同研究を行った. 新型コロナウイルス感染症拡大の影響を受けて, 直接打ち合わせを行う機会が失われ, 本研究課題開始時は研究活動に大きく支障が生じたが, オンライン機器やウェブ会議サービス等を

活用することで、困難な状況を一時的に乗り越えることが出来た。研究期間後半は、当初の予定通り海外共同研究者のもとに出向き、研究打ち合わせを行うことが出来た。対面で打ち合わせを行うことによって得られる知見や情報量は、オンラインで得られるものより遥かに多く、直接議論を行うことの重要性を再認識する機会にもなった。また本研究課題で得られた成果を、国内外のセミナーや研究集会において成果発表し、貴重な意見を数多くいただいた。特に、海外の研究者の方々に興味を持っていただいたことで、新たな国際共同研究等が立ち上がったことは大きな収穫である。

個人の研究活動に加えて、本研究課題および関連分野の普及や次世代の若手研究者育成を目的として、研究期間中に研究集会やスクールを数件開催した。オンライン環境を充実させることにより、研究打ち合わせだけでなく広く情報を発信する方法を確立でき、結果的に本研究課題の更なる普及に寄与した。

4. 研究成果

本研究課題では、主に以下の成果を得た。

(1) Mason Pember 氏(バース大学, 英国), Denis Polly 氏(ウィーン工科大学, オーストリア)との共同研究において、4次元ミンコフスキー空間内のある離散曲面に作用する可積分変換を適用することによって、Weierstrass 型の表現公式を統一的に導出した。これは従来の3次元ユークリッド空間内の離散極小曲面、3次元双曲空間内の離散平均曲率一定1曲面、3次元ミンコフスキー空間内の離散極大曲面を始めとする種々の離散曲面に対する構成法を含んでおり、さらに3次元イソトロピック空間内の離散平均曲率零曲面を始めとする新たな離散曲面の構成法の導出にも成功した。さらに、この結果の拡張として、半離散曲面に対する Weierstrass 型の表現公式の導出にも着手した。半離散曲面は、離散曲面の2つの離散パラメータのうち一方のパラメータのみを連続なものに取り換えたものであり、曲線の列とみなすことができ、半離散曲面は曲線にダグループ変換を施すことによって得られる。この点に着目し、半離散曲面に対する種々の Weierstrass 型の表現公式を導出することにも成功した。

(2) 離散パラ正則関数を用いた、3次元ミンコフスキー空間内の離散時間的曲面の構成法を導出した。離散パラ正則関数はパラ複素数に値を取る関数で、従来の離散正則関数と同様に定義されるが、その幾何的性質は離散正則関数とは大きく異なる。これは離散パラ正則関数が、離散波動方程式の解として記述されることに起因することが研究代表者のこれまでの研究で明らかになっている。この事実に着目し、1次元の境界条件を任意に与えることにより、離散パラ正則関数を構成出来ることを示した。この応用として、離散版折り目特異点を境界として、離散極大曲面と離散時間的極小曲面の両方を持つ、3次元ミンコフスキー空間内の離散平均曲率零曲面の例を初めて構成した。ここで構成された離散曲面を適切に細分することによって連続極限に収束することを実験的に確認したが、理論的に収束性を調べるのが今後の課題である。

これらの結果に加えて、

離散曲面・半離散曲面に対する DPW 法の導出

半離散ガウス曲率負一定曲面の幾何

3次元ユークリッド空間内の離散極小曲面のダグループ変換とその漸近的振る舞い

3次元反ド・ジッター空間内の離散時間的平均曲率一定1曲面の構成

に取り組んだ。新型コロナウイルス感染症拡大の影響で国際共同研究の着手が遅れ、当初の予定通りに進められなかったプロジェクトもあるものの、国内外の多くの研究者も巻き込み、共同研究を開始することには成功した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 M. Pember, D. Polly, M. Yasumoto	4. 巻 TBA
2. 論文標題 Discrete Weierstrass-Type Representations	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Discrete & Computational Geometry	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00454-022-00439-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Masashi Yasumoto	4. 巻 349
2. 論文標題 Semi-discrete maximal surfaces with singularities in Minkowski space	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Springer Proceedings in Mathematics & Statistics	6. 最初と最後の頁 263-280
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/978-3-030-68541-6_16	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Wayne Rossman, 安本真士	4. 巻 73 (1)
2. 論文標題 離散曲面の微分幾何	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 数学	6. 最初と最後の頁 1-21
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計18件（うち招待講演 13件/うち国際学会 10件）

1. 発表者名 M. Yasumoto
2. 発表標題 Discrete p-holomorphic functions and discrete timelike minimal surfaces
3. 学会等名 Workshop "Discrete Geometric Structures"（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 M. Yasumoto
2. 発表標題 Discrete zero mean curvature surfaces in Lorentz-Minkowski 3-space
3. 学会等名 Discussion meeting on zero mean curvature surfaces in the Lorentz-Minkowski space and related areas (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 安本真士
2. 発表標題 可積分な曲面の離散化とその構成
3. 学会等名 令和4年度徳島数学談話会(冬の会)(招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 安本真士
2. 発表標題 可積分変換による離散曲面の構成
3. 学会等名 先端工学研究発表会2023
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 安本真士
2. 発表標題 可積分変換による離散曲面の構成
3. 学会等名 RIMS共同研究(公開型)「可積分系数理の諸相」(招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 安本真士
2. 発表標題 可積分変換による離散極小曲面の構成
3. 学会等名 日本応用数学会2021年度年会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Masashi Yasumoto
2. 発表標題 Construction and deformation of discrete surfaces via integrable transformations (ポスター)
3. 学会等名 The 21st International Conference on Discrete Geometric Analysis for Materials Design (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Masashi Yasumoto
2. 発表標題 Construction of discrete surfaces via integrable transformations
3. 学会等名 The 6th China-Japan Geometry Conference (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Masashi Yasumoto
2. 発表標題 Discrete timelike minimal surfaces
3. 学会等名 International workshop "Discrete Geometric Analysis and its Applications" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Masashi Yasumoto
2. 発表標題 Constructions of discrete surfaces via integrable systems approach: Part I
3. 学会等名 The 4th International Workshop "Geometry of Submanifolds and Integrable Systems" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Masashi Yasumoto
2. 発表標題 Constructions of discrete surfaces via integrable systems approach: Part II
3. 学会等名 The 13th MSJ-SI "Differential Geometry and Integrable Systems" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 安本真士
2. 発表標題 離散Weierstrass型の表現公式
3. 学会等名 日本応用数理学会2020年度年会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 安本真士
2. 発表標題 離散曲面の微分幾何
3. 学会等名 プレ・マス・フォア・イノベーションカフェ
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 安本真士
2. 発表標題 可積分変換による離散曲面の構成法
3. 学会等名 ワークショップ「幾何学と様々な自然現象の解析」(招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Masashi Yasumoto
2. 発表標題 On timelike constant mean curvature surfaces in 3-dimensional Lorentz-Minkowski space
3. 学会等名 minisymposium "Differential geometry" at the CGTA2023 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Masashi Yasumoto
2. 発表標題 Construcion of discrete zero mean curvature surfaces in Euclidean and Lorentz-Minkowski spaces
3. 学会等名 minisymposium "Geometric Shape Generation II: Design" at the ICIAM 2023 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Masashi Yasumoto
2. 発表標題 Discrete Weierstrass-type representations, and beyond
3. 学会等名 The 4th Taiwan-Japan Joint Conference on Differential Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 安本真士
2. 発表標題 曲面の離散微分幾何の拡がり
3. 学会等名 ワークショップ「離散幾何学～理論から物質を探求する～」(招待講演)
4. 発表年 2024年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計11件

国際研究集会 Discussion Meeting on Smooth and Discrete Differential Geometry	開催年 2024年～2024年
国際研究集会 The 4th International Conference on Surfaces, Analysis, and Numerics in Differential Geometry	開催年 2024年～2024年
国際研究集会 Mini-Workshop on Integrable Geometry and Related Topics at Tokushima	開催年 2022年～2022年
国際研究集会 Applications of Harmonic Maps and Higgs Bundles to Differential Geometry	開催年 2022年～2022年
国際研究集会 The 2nd Shot of The 13th MSJ-SI "Differential Geometry and Integrable Systems" ~The 5th International Workshop "Geometry of Submanifolds and Integrable Systems"~	開催年 2022年～2022年
国際研究集会 The 3rd Shot of The 13th MSJ-SI "Differential Geometry and Integrable Systems"	開催年 2023年～2023年
国際研究集会 The 1st FukKO Lectures on Geometry on Discrete Constraint Willmore Surfaces	開催年 2021年～2021年
国際研究集会 Symmetry and Stability in Differential Geometry of Surfaces	開催年 2022年～2022年
国際研究集会 The 4th International Workshop "Geometry of Submanifolds and Integrable Systems"	開催年 2022年～2022年
国際研究集会 The 13th MSJ-SI "Differential Geometry and Integrable Systems"	開催年 2022年～2022年

国際研究集会 可視化の数理と、対称性およびモジュライの深化	開催年 2021年～2021年
----------------------------------	--------------------

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
韓国	高麗大学校			
ルクセンブルク	ルクセンブルク大学			
英国	バース大学	Florida State University London		
オーストリア	TU Wien			
イタリア	トリノ工科大学			