

令和 6 年 6 月 21 日現在

機関番号：14301

研究種目：若手研究

研究期間：2020～2023

課題番号：20K14324

研究課題名（和文）Deformation/rigidity theoryと富田・竹崎理論

研究課題名（英文）Deformation/rigidity theory and Tomita-Takesaki theory

研究代表者

磯野 優介（Isono, Yusuke）

京都大学・数理解析研究所・准教授

研究者番号：80783076

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,200,000 円

研究成果の概要（和文）：フォンノイマン環の近年の話題の中心であるdeformation/rigidity理論を，III型フォンノイマン環というクラスに対して再現する事を目標としていたが，非常に満足のいくレベルでこれを達成する事が出来た．特に応用として，離散群のフォンノイマン環への作用であって，構成されるフォンノイマン環がもとの群作用の情報を完全に覚えているような例を構成する事が出来た．これは離散群の測度空間への作用の場合によく知られた例があるが，これをフォンノイマン環への作用の場合に拡張した最初の例である．他にも非特異ベルヌーイ作用に対して，solidと呼ばれる剛性の性質を示す事が出来た．

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究は（III型でない）フォンノイマン環論において知られている理論を，富田・竹崎理論を用いて，III型のフォンノイマン環に拡張する，というものである．III型フォンノイマン環は非常に扱いが難しく敬遠されがちであるが，一方で数理解析などにも表れる自然な研究対象である．また幾何学的・確率論的に興味深い具体例も数多く存在している．本研究はそのような自然な対象の理解を深めるものであり，基礎的な研究として意義があると考えている．

研究成果の概要（英文）：I am interested in von Neumann algebras arising from group actions on measure spaces. In the case that the action does not preserve any measure, the algebra becomes of type III, which is the most difficult class in von Neumann algebras. I obtained the following results.

First, I succeeded to generalize Popa's techniques to type III algebras. This is a technical result but is the most important part of my research. As an application, I obtained a W^* -superrigidity phenomena.

Second, I proved solidity of nonsingular Bernoulli actions. This example is new in the sense that the action does not preserve any sigma-finite measure.

研究分野：作用素環論

キーワード：フォンノイマン環 富田・竹崎理論 離散群の非特異作用 エルゴード理論

1. 研究開始当初の背景

私の専門は作用素環論、とくにフォンノイマン環論で、これはヒルベルト空間上の有界線形作用素のなす環の部分環について調べるものである。可換な場合には \mathbb{L} 関数環と同型になるため、非可換積分論と呼ばれることもある。

特に重要な例として「群作用環」、すなわち離散群の測度空間への群作用から作られるフォンノイマン環がある。簡単に言えば、作用する離散群と \mathbb{L} 関数環により生成され、環構造に群作用の情報が反映されるものだ。群や作用の情報が、どのように群作用環の(フォンノイマン環としての)構造に影響を与えるか、という点が特に興味を持たれている。Deformation/rigidity theory とは、近年のフォンノイマン環論における中心的話題であり、群作用環を通して群作用とフォンノイマン環の関係を調べるための理論である。

一般にフォンノイマン環の研究は、II 型と III 型という二つのクラスに分けて行われる。II 型の方が振る舞いが良く、III 型のフォンノイマン環は構造がより複雑である事が知られている。III 型環の研究には、富田・竹崎理論と呼ばれる特別な道具が必要である。上で見た群作用環の視点で言えば、群作用が不変測度を持たない場合に III 型になる。また数理物理学で現れるフォンノイマン環の多くは III 型であり、III 型フォンノイマン環は多くの例を持つ自然な研究対象である。

Deformation/rigidity theory で用いられる多くの研究手法は、II 型フォンノイマン環に対して定式化されている。これを III 型のフォンノイマン環に対しても成り立つように一般化する事が望まれており、またそのような研究も実際に行われている。しかし技術的な理由によって、分かっていない事も多い。

2. 研究の目的

Deformation/rigidity theory で用いる研究手法を、III 型のフォンノイマン環に対しても成り立つように再現する事が主目的である。Deformation/rigidity theory で用いられる道具のうち、特に重要な「Popa の技術」(intertwining techniques と呼ばれる)に焦点を当てる。これを適切に再現する事が出来れば、例えば離散群の測度空間への(測度を保たない)作用や、確率論の非可換化の一つである自由荒木・Woods 因子環など、これまでよりも多くの対象を同時に扱えるような、広く強力な理論を作る事が出来る。これまでの理論では適用出来なかった具体例も扱えるようになるため、応用面でも役立つ事が期待される。

3. 研究の方法

Popa の技術とは、フォンノイマン環の部分環に対する主張であり、二つの部分環がいつユニタリ共役で移りあうか、という問題の(極めて実用的な)十分条件を与えるものである。III 型フォンノイマン環に対してこれを実現するため、富田・竹崎理論における連続核というものをを用いる。

連続核とは、III 型フォンノイマン環から自然な方法で作る事の出来る II 型のフォンノイマン環である。構成が自然である事から、部分環に対しても同時に連続核を考える事が出来て、連続核においても包含が出来る。連続核はいつでも II 型であるから、ここでは Popa の技術を直接用いる事が出来る。このようにして得られた連続核上の情報が、もとの III 型フォンノイマン環の上でどのように反映されるか、という点を調べる必要がある。

実はこのような視点の研究はすでに行われており、過去に得られた III 型環に対する deformation/rigidity theory の結果は、多くがこの方法を用いている。しかしそのような結果は全て「考えている部分環は II 型である」という条件を課しており、この部分が技術的な制限になっていた。部分環の方も III 型にする、という仮定のもとで、富田・竹崎理論の道具を用いた研究を行う。

4. 研究成果

本研究においては多くの結果を得たが、その中でも特に重要と思われるものに焦点を当てて解説する。

まず Popa の技術についてだが、連続核を用いる方法が成功した。一般に III 型フォンノイマン

環にはモジュラー作用と呼ばれるものがいつでも付随しており、これが環の(III 型としての)情報を概ね持っている。Popa の技術による部分環の埋め込みに、このモジュラー作用の情報を合わせる事で、しかるべく同値性を示す事が出来た。実際の同値性の主張には、テンソル積のトリック(これ自体はいつでも使える)が混ざっている事に注意する。

応用として、 W^* -superrigidity と呼ばれる現象の新しい例を得る事が出来た。これは群作用環の「フォンノイマン環としての構造」を見る事で、もとの「群作用の構造」を完全に復元できるような現象の事である。今回得られた例は「離散群のフォンノイマン環への作用」に対するものであり、このような例は他に一つも知られていない。証明には III 型環にしか現れない情報を使っており、非常に興味深い例であると言えるだろう。

次に長谷川・神田両氏との共同研究について解説する。一般に離散群のベルヌーイ作用とは、無限個の直積確率空間に対して、その成分を群演算によりずらす事で定まる作用である。作用素環論では古くから研究されている対象である。

このベルヌーイ作用の確率測度を(成分ごとに異なるものを並べて)取り換える事で、測度を保たない群作用を構成する事が出来る場合がある。(この作用が構成出来るための条件は、著名な角谷の定理によって完全に理解されている。)このようにして出来る作用を非特異ベルヌーイ作用と呼ぶ。この作用から作るフォンノイマン環は III 型になる事もあり、deformation/rigidity theory の枠組みでの研究が期待されていた。本共同研究で、実際に III 型になる作用の場合に、solid と呼ばれる剛性の構造を持つ事を証明する事が出来た。これは極めて強い意味でのエルゴード性のようなもので、通常の(測度を保つ)ベルヌーイ作用に対しては、deformation/rigidity theory の応用結果としてよく知られていた。非特異作用ベルヌーイ作用に対しては初めての結果である。

この証明では、非特異作用ベルヌーイ作用を CAR 構成と呼ばれる物理学でよく使われるフォンノイマン環に埋め込む方法を用いた。このような埋め込みが存在する事は、古典的な事実として知られていたのだと思われるが、適切な文献を見つける事は出来なかった。少なくとも、実際にこの方法をベルヌーイ作用の研究に用いたのは初めてだと思われる。

ここで CAR 構成を使う利点は、CAR 構成によって得られる環の方が、ベルヌーイ作用の無限直積よりも計算がしやすい事である。

最後に C. Houdayer 氏との共同研究について解説する。この共同研究では、Haagerup-Stormer 予想(1988)に取り組んだ。これは III 型フォンノイマン環の自己同型に関する予想であり、非常にいい加減に述べると以下のようなものである：

環上の状態(良い線形汎関数の事)の性質をあまり変えない自己同型はモジュラー作用素しかない。

従順環(物理学に現れるクラス)についてはこの性質が実際に成り立つ事が知られているが、非従順環の場合に予想が成り立つ例は全く知られていなかった。私は C. Houdayer 氏との共同研究で、非従順環の場合にこの予想が成り立つ例を構成する事に成功した。より詳しく、従順環をテンソルで吸収するような環であればいつでも予想が肯定的に成り立つ事を証明した。これは数多くの新しい例を含む、興味深い結果である。他にもテンソルの形をしていない例として、自由荒木・Woods 環と呼ばれるクラスについてもある程度の結果を示す事が出来た。これらの証明では上述した近年の研究結果の一つである「二つの状態に対する intertwining の技術」が本質的な役割を果たしている。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計7件（うち査読付論文 7件 / うち国際共著 3件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Hasegawa Kei, Isono Yusuke, Kanda Tomohiro	4. 巻 389
2. 論文標題 Boundary and Rigidity of Nonsingular Bernoulli Actions	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Communications in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 977 ~ 1008
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00220-021-04134-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hasegawa Kei, Isono Yusuke, Kanda Tomohiro	4. 巻 74
2. 論文標題 Note on bi-exactness for creation operators on Fock spaces	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of the Mathematical Society of Japan	6. 最初と最後の頁 903 ~ 944
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2969/jmsj/86338633	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Arano Yuki, Isono Yusuke, Marrakchi Amine	4. 巻 31
2. 論文標題 Ergodic theory of affine isometric actions on Hilbert spaces	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Geometric and Functional Analysis	6. 最初と最後の頁 1013 ~ 1094
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00039-021-00584-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Isono Yusuke	4. 巻 24
2. 論文標題 Unitary conjugacy for type III subfactors and W^* -superrigidity	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of the European Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 1679 ~ 1721
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4171/JEMS/1135	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Houdayer Cyril、Isono Yusuke	4. 巻 52
2. 論文標題 Connes' bicentralizer problem for q deformed Araki-Woods algebras	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Bulletin of the London Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 1010 ~ 1023
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1112/blms.12376	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Isono Yusuke	4. 巻 19
2. 論文標題 On fundamental groups of tensor product II_1 factors	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu	6. 最初と最後の頁 1121 ~ 1139
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/S1474748018000336	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Caspers Martijn、Isono Yusuke、Wasilewski Mateusz	4. 巻 IMRN2021
2. 論文標題 L 2-Cohomology, Derivations, and Quantum Markov Semi-Groups on q -Gaussian Algebras	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 International Mathematics Research Notices	6. 最初と最後の頁 6405 ~ 6441
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1093/imrn/rnaa044	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計7件（うち招待講演 4件 / うち国際学会 1件）

1. 発表者名 Yusuke Isono
2. 発表標題 Pointwise inner automorphisms of almost periodic factors
3. 学会等名 RIMS研究集会「作用素環論における群作用と数理物理の関連」（招待講演）
4. 発表年 2023年

1．発表者名 磯野優介
2．発表標題 Ergodic theory of affine isometric actions on Hilbert spaces
3．学会等名 作用素論・作用素環論研究集会（招待講演）
4．発表年 2020年

1．発表者名 磯野優介
2．発表標題 Boundary and rigidity of nonsingular Bernoulli actions
3．学会等名 日本数学会
4．発表年 2021年

1．発表者名 Yusuke Isono
2．発表標題 Haagerup and Stormer's conjecture for pointwise inner automorphisms
3．学会等名 Operator Algebras and Mathematical Physics（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2023年

1．発表者名 磯野優介
2．発表標題 Haagerup and Stormer's conjecture for pointwise inner automorphisms
3．学会等名 RIMS研究集会「作用素環論と種々の対称性」（招待講演）
4．発表年 2024年

1．発表者名 磯野優介
2．発表標題 Pointwise inner automorphisms of almost periodic factors
3．学会等名 日本数学会
4．発表年 2022年

1．発表者名 磯野優介
2．発表標題 Haagerup and Stormer's conjecture for pointwise inner automorphisms
3．学会等名 日本数学会
4．発表年 2024年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

磯野優介のホームページ https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~isono/
--

6．研究組織			
	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国		相手方研究機関		
フランス	パリ 1 1 大学	ENS Lyon		