様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　７ 年　 ６ 月 １７ 日現在

機関番号：１５３０１
研究種目：若手研究
研究期間：2020～2024
課題番号：２０Ｋ１４３２８

研究課題名（和文）磁場中シュレーディンガー方程式に対する散乱理論およびスペクトルの研究

研究課題名（英文）Researches on spectral and scattering theory for magnetic Schr\"{o}dinger equation

研究代表者
川本　昌紀（Kawamoto, Masaki）

岡山大学・異分野基礎科学研究所・准教授

研究者番号：４０７７０６３１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,200,000円

研究成果の概要（和文）：磁場中のシュレディンガー方程式は重要な物理現象を記述する量子力学の基本方程式であるが、その数学的な特性から既存の研究理論をうまく当てはめることが困難であったが、申請者の分解理論により、線形散乱や非線形散乱といった数学的対象の研究を成功させ、国内共著を含む国際紙へ15編の論文を掲載し、また国際共著で1編の論文を掲載させた。また国内外で多数の講演を行い、共同研究の幅を大きく広げ、新しい研究の創出に成功した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
非線形シュレディンガー方程式(NLS)の研究は大きな発展を遂げ、昨今は多様な数学的対象を取り込み問題の難化が著しい。我々の研究はそのNLSの研究への入り口としてとても参入が容易であり、実際、申請者は学生やポスドクの若手の研究者と多くの共同研究を行ってきた。本研究の発展により、若手の研究者の論文投稿やNLSの研究へ参入する入り口を広げる事で、今後益々、若手研究者がシュレディンガー方程式の研究分野で育つ事が期待され、於いては我が国の数学的研究力の底上げが実現出来ると期待している。

研究成果の概要（英文）：The Schrodinger equation in a magnetic field is a fundamental equation of quantum mechanics that describes important physical phenomena. However, due to its mathematical characteristics, it has been difficult to apply existing theoretical frameworks effectively. Nevertheless, through the my decomposition scheme, research on mathematical subjects such as linear and nonlinear scattering has been successfully carried out. As a result, sixteen papers, including those co-authored domestically, have been published in international journals, along with one paper co-authored internationally. In addition, the I have given numerous presentations both in Japan and abroad, significantly expanding the scope of collaborative research and successfully generating new lines of research.

研究分野：偏微分方程式

キーワード：シュレディンガー方程式　非線形シュレディンガー方程式　散乱　電磁場

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１（共通）

１．研究開始当初の背景

シュレディンガー方程式の数学的研究は，古くから多くの日本人研究者によって研究の発展が与えられた，日本の数学の解析学の研究における重要な位置を占める研究である。そのため，多くの熟練研究者が活躍し，またその学生たちも尽力的に研究を行っている。一方で，このシュレディンガー方程式の数学的研究の中で，時間に依存した磁場，即ち，微小な粒子が時間依存磁場(例えば交流電源に繋がれたコイル)の影響を受けた際の運動方程式であるが，この影響下での数学的な研究結果は著しく少なく，今なお多くの未可決問題が残っている。また磁場中のシュレディンガー方程式に自己相互作用を加えた非線形方程式の研究は殆どと言って良いほど研究がなされていなかった。
昨今では線形及び非線形シュレディンガー方程式の研究は，その基礎方程式の研究はかなり精密に解析されており，この方程式に対する基礎的な研究は研究され尽くしてしまったと言っても過言ではない。一方で，この方程式の最新の研究へのアプローチは多くの勉強と時間を要してしまい，博士やポスドクの学生が論文の生産という観点からは，他研究との勝負が難しくなっているように感じる。

２．研究の目的

この時間依存する磁場に対して 2019 年に私が提唱した分解理論を扱うことで，方程式は非常にシンプルな形，特に，研究尽くされた基礎方程式に類似した(しかし磁場の影響も現れている)方程式に変換する事が示された。この事実から多様な研究，特に非線形方程式や線形散乱理論への応用が期待できる。またこの研究は時間依存磁場に起因するため，その物理学的興味は高く，多くの研究への意味付けが可能となる。この為，本研究の目的は，この変換を用いた数学理論の基礎を作り上げることで，研究し尽くされた基礎方程式に新しい研究の風を吹き込む事で，問題であった論文の生産を可能とし，若手研究者が日本の解析学を支えてきたシュレディンガー方程式の研究へ参入するための簡単な入口を用意することで，若手研究者の育成，しいては日本の研究力の基礎の向上の両方を担う研究分野を生み出し，また，その基礎をもとに国内及び国外での(特に若手研究者同士での)共同研究を実現していきブレークスルーを生み出す。

３．研究の方法

変換理論を基に，スペクトル理論，非線形散乱理論などへの応用の基礎を整えることで，国内外の研究者のこの研究への参入を容易にする。具体的には，線形のスペクトル理論や散乱理論の構築，特に一体粒子系における波動作用素とその完全性の考察。非線形方程式へ優れた汎用性のある Strichartz 評価式の導出，及び Hayashi-Naumkin 型の修正散乱作用素の構成法を時間依存磁場中でも考察可能かを調べる。これらの成功により，レゾナンスや多体散乱，非線形解析などの多くの発展的研究への応用可能性が見ることができる。

国内外でシュレディンガー方程式に関する研究集会を開催し，研究者の招致を行い，時間依存磁場への応用可能な研究を模索，またこの分解理論がうまく適合する新しい研究の発掘を目指し，また，それらに関連した研究者との共同研究を模索する。

４．研究成果

線形のスペクトル理論や散乱理論に関しては，東京理科大学の石田敦英氏と時間に依存する磁場に対する波動作用素の存在及び存在について議論し，基礎方程式と同様の議論が上手く回ることが示された。この結果は 2020 年に国際誌 Rep.Math.Phys.に掲載された，また基礎方程式とは全く類似しない軌道の解析にも成功し，磁場と特有の難しい性質の解析が求められたが，同様に波動作用素の存在，非存在を示すことに成功した。この結果は 2020 年に JMAA に掲載された。
また，この研究で培った解析手法を空間増大の弱い磁場中のシュレディンガー方程式にも応用できることを発見し，この問題に関しても関しての波動作用素の非存在について証明することに成功した、本研究は JMP に 2023 年に掲載された。また近年では，石田氏が単独で，時間依存磁場に関する逆問題について研究をしており，基礎理論の構築により，応用的研究への発展がなされている。これらの研究とは少し経路が変わるが，時間非依存磁場に電場を加えた問題を考察し，この系における固有値の非存在について証明を行った。この研究はフランスの数学者である Dimassi 氏と Petkov 氏によって提唱された問題であるが，長い間未解決であった。この問題に関して，Bordeaux 大学の Dimassi 氏と Petkov 氏と共同研究を行い，部分的ではあるが問題の解決に成功した。特にこの研究の成功により，同系に対するレゾナンスの研究及びスペクトルシフトに関する研究が可能となり，また固有値の非存在から一様レゾルベント評価への応用も期待で

きる。

また時間依存磁場の非線形方程式への応用に関しては，非線形方程式への基礎評価となるStrichartz 評価式を導出した。この研究結果は 2020 年に Part. Differ. Eqn. Appl. に掲載された。本結果を通して非線形方程式への応用が期待される。その為，私はまず，当時，東京理科大学の学生であった(現助教)村松亮氏と非線形修正散乱への応用が可能かを議論し，私の変換理論だけでなく，Korotyaev の生み出した別の変換理論を上手く組み合わせる事で，Hyashi-Naumkin 型の解析手法と同様の解析手法を確立することに成功した。この結果は 2020 年に JEE に掲載された。この Hayashi-Naumkin 型の解析手法は非常に汎用性に優れ，当時ポスドク(現愛媛大学)の佐藤拓也氏と，応用的研究である消散項がついた非線形シュレディンガー方程式へ同種の手法が応用可能であるかを模索し，かなり一般の磁場で応用できることを突き止めた。この結果は 2023 年に JDE に掲載された。また石田氏と研究を行った，基礎方程式とは全く類似しない軌道，に対しても非線形散乱が考察可能であることを突き止め，研究を行った。この結果は 2021 年に JDE に掲載された。現在は，この特殊な磁場に佐藤氏と行った消散項がついた非線形シュレディンガー方程式に応用できるかを検証している。
私自身で証明した Strichartz 評価式の応用にも尽力しており，まず Strichartz 評価式を非線形修正散乱の終値問題へ応用させることに成功した。この論文は 2021 年に JMAA に掲載された。またこの結果を香川大学の宮崎隼人氏と一般の非線形項に対して応用することに成功した。この論文は 2023 年に JDE に掲載された。加えて，近年ではこの研究の終着点の一つである非線形修正散乱作用素の構成を宮崎氏と考察し、論文が掲載された(Nonlinear Analysis.2025)。この研究では私の考察した分解理論と Korotyaev の分解理論を上手く組み合わせることで，強い位相でも Hayashi-Naumkin 型の解析手法が回ることを証明できた為，今後はこの問題に付随する逆問題などを中心に研究を進めていく。
また非線形の研究を通して培った解析手法をと線形解析の手法を組み合わせ，長距離型線形ポテンシャルと長距離型非線形項の両方が含まれた系を大阪大学の水谷治哉氏と考察し，その漸近系を与える事に成功した。この研究は既存の線形ポテンシャルを考慮に入れた非線形問題では到底扱えない線形ポテンシャルを考察することに成功しており，この結果は 2025 年に Trans.AMS に掲載された。また北海道大学の眞崎聡氏，宮崎氏と線形のレゾルベンと評価を用いた新たな解析手法を提唱し，二次元のストラウス冪以下での時間大域解の構成に成功した。この結果は 2025 年に Math.Ann.に掲載された。
申請者が生み出した時間依存磁場の単純化のスキームであるが、自身を中心として着実に共同研究の輪を広げており，発展的研究への応用にも成功している。また自身の関与しない研究へも応用が見られており，少しずつではあるが着実に研究が広がっており、今後大きな研究へと昇華される事が期待できる。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計16件（うち査読付論文　14件／うち国際共著　1件／うちオープンアクセス　0件）

１．著者名 Kawamoto Masaki、Mizutani Haruya	４．巻 378
２．論文標題 Modified scattering for nonlinear Schrodinger equations with long-range potentials	５．発行年 2025年
３．雑誌名 Transactions of the American Mathematical Society	６．最初と最後の頁 3625～3652
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1090/tran/9369	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Kawamoto Masaki、Masaki Satoshi、Miyazaki Hayato	４．巻 392
２．論文標題 Global well-posedness and scattering in weighted space for nonlinear Schrodinger equations below the Strauss exponent without gauge-invariance	５．発行年 2025年
３．雑誌名 Mathematische Annalen	６．最初と最後の頁 1051～1097
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00208-025-03121-w	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Kawamoto Masaki、Miyazaki Hayato	４．巻 256
２．論文標題 Modified scattering operator for nonlinear Schrodinger equations with time-decaying harmonic potentials	５．発行年 2025年
３．雑誌名 Nonlinear Analysis	６．最初と最後の頁 113778～113778
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.na.2025.113778	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Kawamoto Masaki、Miyazaki Hayato	４．巻 365
２．論文標題 Long-range scattering for a critical homogeneous type nonlinear Schrodinger equation with time-decaying harmonic potentials	５．発行年 2023年
３．雑誌名 Journal of Differential Equations	６．最初と最後の頁 127～167
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jde.2023.04.009	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 Ishida Atsuhide、Kawamoto Masaki	4．巻 64
2．論文標題 Nonexistence of wave operators via strong propagation estimates for Schrodinger operators with sub-quadratic repulsive potentials	5．発行年 2023年
3．雑誌名 Journal of Mathematical Physics	6．最初と最後の頁 123301
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1063/5.0164176	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 Kawamoto Masaki、Sato Takuya	4．巻 345
2．論文標題 Asymptotic behavior of solutions to a dissipative nonlinear Schrodinger equation with time-dependent harmonic potentials	5．発行年 2023年
3．雑誌名 Journal of Differential Equations	6．最初と最後の頁 418～446
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jde.2022.11.034	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 Kawamoto Masaki、Yoneyama Taisuke	4．巻 3
2．論文標題 Strichartz estimates for quadratic repulsive potentials	5．発行年 2022年
3．雑誌名 Partial Differential Equations and Applications	6．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s42985-022-00150-x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 Kawamoto Masaki	4．巻 303
2．論文標題 Asymptotic behavior for nonlinear Schrodinger equations with critical time-decaying harmonic potential	5．発行年 2021年
3．雑誌名 Journal of Differential Equations	6．最初と最後の頁 253～267
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jde.2021.09.028	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 Kawamoto Masaki	4．巻 503
2．論文標題 Final state problem for nonlinear Schrodinger equations with time-decaying harmonic oscillators	5．発行年 2021年
3．雑誌名 Journal of Mathematical Analysis and Applications	6．最初と最後の頁 125292～125292
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jmaa.2021.125292	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 Kato Keiichi、Kawamoto Masaki、Nanbu Koichiro	4．巻 61
2．論文標題 Singularity for solutions of linearized KdV equations	5．発行年 2020年
3．雑誌名 Journal of Mathematical Physics	6．最初と最後の頁 051502～051502
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1063/1.5141516	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 Ishida Atsuhide、Kawamoto Masaki	4．巻 85
2．論文標題 Existence and Nonexistence of Wave Operators for Time-Decaying Harmonic Oscillators	5．発行年 2020年
3．雑誌名 Reports on Mathematical Physics	6．最初と最後の頁 335～350
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/S0034-4877(20)30040-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 Kawamoto Masaki	4．巻 56
2．論文標題 L^2-properties for linearized KdV equation around small solutions	5．発行年 2021年
3．雑誌名 SUT Journal of Mathematics	6．最初と最後の頁 1~19
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 Kawamoto Masaki	4．巻 -
2．論文標題 Strichartz Estimates for Schrodinger Operators with Square Potential with Time-Dependent Coefficients	5．発行年 2020年
3．雑誌名 Differential Equations and Dynamical Systems	6．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s12591-020-00537-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 Kawamoto Masaki、Muramatsu Ryo	4．巻 21
2．論文標題 Asyptotic behavior of solutions to nonlinear Schrodinger equations with time-dependent harmonic potentials	5．発行年 2020年
3．雑誌名 Journal of Evolution Equations	6．最初と最後の頁 699～723
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00028-020-00597-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 Ishida Atsuhide、Kawamoto Masaki	4．巻 492
2．論文標題 Critical scattering in a time-dependent harmonic oscillator	5．発行年 2020年
3．雑誌名 Journal of Mathematical Analysis and Applications	6．最初と最後の頁 124475～124475
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jmaa.2020.124475	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 Dimassi Mouez、Kawamoto Masaki、Petkov Vesselin	4．巻 -
2．論文標題 Absence of embedded eigenvalues for Hamiltonian with crossed magnetic and electric fields	5．発行年 2021年
3．雑誌名 Reviews in Mathematical Physics	6．最初と最後の頁 2150020～2150020
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S0129055X21500203	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕　計5件（うち招待講演　0件／うち国際学会　0件）

１．発表者名 川本昌紀，水谷治哉
２．発表標題 Modified scattering for nonlinear Schrodinger equations with long-range potentials
３．学会等名 日本数学会　秋季分科会
４．発表年 2024年

１．発表者名 川本昌紀、石田敦英
２．発表標題 Nonexistence of wave operators for sub-quadratic repulsive potential
３．学会等名 日本数学会2023年度秋季分科会
４．発表年 2023年

１．発表者名 川本昌紀、宮崎隼人
２．発表標題 時間減衰する調和振動子を持つ非線形シュレディンガー方程式の修正散 乱作用素について
３．学会等名 日本数学会2024年度春季分科会
４．発表年 2023年

１．発表者名 川本昌紀、石田敦英
２．発表標題 臨界係数を持つ時間減衰調和振動子に対する波動作用素の存在・非存在について
３．学会等名 日本数学会秋季学会
４．発表年 2022年

１．発表者名 川本昌紀、宮崎隼人
２．発表標題 時間減衰する調和振動子を持つ臨界斉次型非線形シュレディンガー方程式における長距離散乱について
３．学会等名 日本数学会秋季学会
４．発表年 2022年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
フランス	Bordeaux University			