

令和 6 年 5 月 30 日現在

機関番号：12501

研究種目：若手研究

研究期間：2020～2023

課題番号：20K14329

研究課題名（和文）Green関数を用いた単純ランダムウォークの非交叉確率の解析

研究課題名（英文）Analysis of non-intersection probability of random walks using Green's function

研究代表者

岡田 いず海 (Okada, Izumi)

千葉大学・大学院理学研究院・准教授

研究者番号：40795605

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,900,000円

研究成果の概要（和文）：柳田氏（東京大学）との共同研究では、Hardy-type のポテンシャル項に非整数ブラウン運動の動きをする動的特異点をつけた3次元以上の熱方程式の解析を進めた。Amir Dembo氏（Stanford大学）との研究においては、単純ランダムウォークの軌跡を領域としたときの capacity の3次元以上の場合の重複対数の法則について研究を進めた。さらに、Arka Adhikari氏（Stanford大学）との研究においては、4次元の単純ランダムウォークの capacity の中偏差原理を評価した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

多次元の単純ランダムウォークおよびその連続時間対応物のブラウン運動の非交叉の問題は、1940年代から調べられている古典的な問題として知られている。2000年代には、2次元の非交叉モデルの解析において、大きなブレークスルーとなった Schramm Loewner evolution 理論が誕生し、大きく研究が進展した。しかし、Schramm Loewner evolution 理論は2次元特有に理論であり、他の次元では未解決な問題が多い。本研究では交叉の事象と対応関係が知られる3次元以上の単純ランダムウォークの capacity 等の解析を進めた。

研究成果の概要（英文）：In collaboration with Eji Yanagida (University of Tokyo), we analyzed the heat equation in more than three dimensions with a Hardy-type potential term and a dynamic singularity with non-integer Brownian motion. In collaboration with Amir Dembo (Stanford University), we studied the law of iterated logarithms of capacity in more than three dimensions when the trajectory of a simple random walk is the domain. Furthermore, in a study with Arka Adhikari (Stanford University), we evaluated the deviation principle of capacity for 4-dimensional simple random walks.

研究分野：確率論

キーワード：単純ランダムウォーク ブラウン運動 局所時間

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

本研究のテーマである多次元の独立な単純ランダムウォークおよびその連続時間対応物であるブラウン運動の非交叉の問題は、古典的な問題として知られている。2000年代には、2次元の非交叉モデルの解析において、大きなブレークスルーとなる理論が誕生した。Schramm-Loewner evolution 理論と呼ばれるこの理論は、ブラウン運動の非交叉の問題を進展させた。しかし、2次元において革新的な理論であった Schramm-Loewner evolution 理論も共形場理論をベースとした2次元特有の理論であるため、他の次元への適用は難しい。したがって、単純ランダムウォークの交叉に関する新たな手法を構築したいと考えた。

2. 研究の目的

申請者はこれまで、単純ランダムウォークの local time (局所時間)について研究を行ってきた。local time とは単純ランダムウォークが各点に滞在する累積時間に相当する。特に favorite point や late point と呼ばれる local time が平均と比べて非常に大きい点あるいは小さい点の幾何構造に着目してきた。具体的には、(固定された)多点への local time の評価手法を独自に構築し問題を解決してきた。本研究ではそれを踏まえて、この新しい技術である多点への local time の評価手法を3次元以上のランダムウォークの交叉の問題へと応用し、新しい解析手法の構築を目指した。

3. 研究の方法

多次元整数格子上の単純ランダムウォーク及びその連続時間版のブラウン運動の交叉に関する事象に対し、Green 関数や local time の性質の解析を行った。大まかには、ある確率過程の軌跡に対する local time が0であるということと、ある確率過程と非交叉であることが同値なことに着目して、local time 関連の研究を非交叉の解析に応用することを考え研究を遂行した。特に、Green 関数はランダムウォークのある点に対しての到達確率と関係性があることが知られているが、これを多点に拡張した時の関係性の解析を進め、その性質を調べた。具体的には、ランダムウォークの軌跡についての capacity(ランダムウォークの到達確率に対応する量)に着目した。詳細には、3次元以上におけるランダムウォークのある時刻 n までの軌跡の capacity に関する n 無限大での極限定理を評価した。具体的には、 n 無限大のときの重複対数の法則や大偏差原理や期待値の挙動を計算した。ランダムウォークの capacity の期待値は2つの独立なランダムウォークの交叉確率と対応している量である。

4. 研究成果

本研究の主な成果は以下の3点である。

1. 海外特別研究員時の受け入れ教員である Amir Dembo 氏(スタンフォード大学)との共同研究において、3次元以上の単純ランダムウォークの capacity の極限定理、特に重複対数の法則に関する結果が得られた。(重複対数の法則とは、確率1での確率過程の上極限や下極限のオーダーを評価する定理である。)具体的には、次元 d が4以上の場合は $d-2$ 次元の単純ランダムウォークの volume の重複対数の法則と同じオーダーであることがわかった。一方、3次元の場合は、1次元の単純ランダムウォークの volume の重複対数の法則と違うオーダーになることがわかった。また、3次元の単純ランダムウォークの capacity と1次元の単純ランダムウォークの volume に関する相関を求めた。今後の研究課題として、単純ランダムウォークの軌跡を領域としたときの capacity の大偏差原理に関する評価を進

め、 $d-2$ 次元の単純ランダムウォークの volume の大偏差原理の評価と比較したいと考えている。この結果は「Capacity of the range of random walk: The law of the iterated logarithm」というタイトルで投稿し、Annals of Probability に掲載決定された。

2. Arka Adhikari 氏(スタンフォード大学)と 4 次元における単純ランダムウォークの capacity の中偏差原理を評価した。その結果、その rate function が Riesz 関数で重みづけされた Gagliardo-Nirenberg の不等式に依存することが判明し、評価から得られる rate function も解析的に重要な方程式に関連することが示唆された。この結果は「Moderate Deviations for the Capacity of the Random Walk range in dimension four」というタイトルで arXiv に投稿した。
3. 柳田英二氏(東京大学)との共同研究にて、Hardy-type のポテンシャル項に非整数ブラウン運動の動きをする動的特異点をつけた 3 次元以上の熱方程式について、解の存在・非存在に関する必要十分条件を与えた。この必要十分条件は、ポテンシャル項の指数オーダーと非整数ブラウン運動のハースト指数による特徴づけを与えるものである。手法としては、Feynman-Kac の公式より得られる熱方程式と local time の関係性に着目した。今後の方針として、ポテンシャル項を変えた場合に、ブラウン運動の交叉確率と関係性があるか調べることで、熱方程式との関係性を用いた local time の解析手法の可能性をさらに広げたいと考えている。また、柳田氏との結果は「Probabilistic approach to the heat equation with a dynamic Hardy-type potential」というタイトルで投稿し、Stochastic processes and their applications に掲載された。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 1件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Amir Dembo, Izumi Okada	4. 巻 -
2. 論文標題 Capacity of the range of random walk: The law of the iterated logarithm	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 The Annals of Probability	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Eji Yanagida, Izumi Okada	4. 巻 145
2. 論文標題 Probabilistic approach to the heat equation with a dynamic Hardy-type potential	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Stochastic Processes and their Applications	6. 最初と最後の頁 204-225
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計3件（うち招待講演 0件 / うち国際学会 1件）

1. 発表者名 岡田 いず海
2. 発表標題 The heat equation with a dynamic Hardy-type potential
3. 学会等名 北東数学解析研究会（国際学会）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Izumi Okada
2. 発表標題 Deviation of Capacity of the Range of Random Walk
3. 学会等名 French Japanese Conference on Probability & Interactions
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 Izumi Okada
2. 発表標題 Capacity of the range of random walk
3. 学会等名 Stochastic Processes and Related Fields
4. 発表年 2023年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織			
氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関		
米国	スタンフォード大学		