

令和 6 年 5 月 31 日現在

機関番号：12608

研究種目：若手研究

研究期間：2020～2023

課題番号：20K14341

研究課題名（和文）幾何学の高階変分問題の解の性質の研究

研究課題名（英文）Study of properties of solutions to geometric higher order variational problems

研究代表者

三浦 達哉（Miura, Tatsuya）

東京工業大学・理学院・准教授

研究者番号：40838744

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,200,000円

研究成果の概要（和文）：幾何学の変分問題の中でも、曲率などの高階微分をエネルギーに含むような問題に対し、解の性質に主眼を置いて研究を行った。特に、曲線の曲がり方を測る曲げエネルギーの変分問題である弾性曲線の問題に焦点を当て、幾何学的不等式・臨界点の分類定理・勾配流の挙動の解析などの成果を得た。またその過程で関連する幾何解析の問題にも広く着手し、曲面の直径と平均曲率の関係に関する Topping 予想の部分的解決および極小曲面理論への応用や、距離関数の特異点集合に関する一般的な構造定理の証明を行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

弾性曲線の研究は Daniel Bernoulli および Leonhard Euler により 18 世紀に創始されたものであり、高階幾何学の変分問題の最も基本的な例として純粋数学的に重要であるのみならず、弾性棒の形状を中心とした物理現象の解析に直接適用可能であることや、画像処理などの応用分野においても重要な役割を果たすことが知られている。このような古典的問題を含む様々な幾何解析の問題に対し、未解決問題の解決を含む種々の新しい成果が得られたことは、学術的にも社会的にも意義深いものと考えられる。

研究成果の概要（英文）：Among geometric variational problems, we studied problems that include higher-order derivatives such as curvature in their energy, focusing on the properties of the solutions. In particular, we focused on the problem of elastic curves, which is a variational problem of the bending energy that measures how a curve bends, and obtained results such as geometric inequalities, classification theorems for critical points, and analysis of the behavior of gradient flows.

In the process, we also worked extensively on related problems of geometric analysis. We partly solved the Topping conjecture on the relation between the diameter of a surface and its mean curvature, and found an application to the theory of minimal surfaces. We also proved a general structure theorem on the singular set of the distance function.

研究分野：数理解析学関連

キーワード：幾何学の変分問題 高階問題 弾性曲線 弾性流 p-弾性曲線 極小曲面 Topping 予想 距離関数

様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

1. 研究開始当初の背景

幾何学的高階変分問題とは、曲線や曲面のような幾何学的対象のクラスにおいて、曲率のような高階微分を含むエネルギーの最小解を見つける問題を指す。このような問題は純粋数学的に重要であるのみならず、多くの応用上重要な数理モデルとも関わっている。例えば18世紀の Euler による弾性曲線の理論に始まり、現在でも細胞膜の形状を記述する Helfrich モデルや画像処理への応用など幅広い分野で研究されている。しかしながら高階問題の解析においては、低階問題特有の性質である最大値原理などが適用できず、その数学的理解は発展途上である。特に解の一意性や形状などの性質を調べるための方法論は低階問題に比べ遥かに未発達である。

2. 研究の目的

本研究では上記のような弾性曲線の問題を中心とした幾何学的高階変分問題に対し、特にエネルギーの定量的ふるまいに着目したアプローチにより、新たな視点から解の一意性や形状形成の原理を捉えることを目指す。またそのために必要な基礎理論の整備も目標とする。

3. 研究の方法

自身の単独研究および共同研究者との議論を並行して行った。研究期間の多くがコロナ禍にあり、出張を伴う研究の議論や、研究課題に関する情報収集、および研究成果の普及については当初の期待通りとはならなかったが、オンラインでの研究議論・情報収集・講演活動を可能な限り密に行った。研究期間終盤においてはコロナ禍の影響も薄れたため、キャンベラ(オーストラリア)の Australian National University やマドリッド(スペイン)の Institute of Mathematical Sciences (ICMAT) への滞在を含め、国内外における研究活動を積極的に行った。また早稲田大学における国際研究集会 ICIAM 2023 Tokyo では、Tobias Ried (Max Planck Institute for Mathematics in the Sciences) と Jonas Sauer 氏 (University of Jena) と共同でミニシンポジウム “Nonlinear PDEs & Probability” を主催した。

4. 研究成果

(1) 曲線の Li-Yau 型不等式

一般次元ユークリッド空間内の閉曲線に対し、曲げエネルギーと多重度に関する Li-Yau 型不等式を得た。これは Müller-Rupp の提示した未解決問題を解決するものである。この不等式は、余次元 1 かつ偶数多重度であれば最適であり、また余次元 2 以上であればすべての多重度で最適となる。更に最適の場合において等号を達成する形状の完全な特徴付けも与え、それらの形状を leafed elastica と名付けた。この形状は応用上も重要と考えられ、実際に種々の leafed elastica が弾性結び目の実験において自然に現れることも確認した。一方、余次元 1 かつ奇数多重度の場合においては、代数的障害が理由で不等式が最適でない(更に改良される)という興味深い事実も発見した。また弾性流や弾性ネットワークへの応用も与え、特に弾性ネットワーク問題に対しては Dall'Acqua-Novaga-Pluda によって未解決問題とされていた余次元 2 以上の場合を含む一般余次元での最小解の存在定理を与えた。論文は Calculus of Variations and Partial Differential Equations に掲載された。

(2) 弾性流の挙動の解析

Marius Müller 氏 (Augsburg University) と Fabian Rupp 氏 (University of Vienna) との共同研究で、弾性流と呼ばれる高階放物型幾何学流の「埋め込み性の破れ」に関する定量的研究を行った。(1) で得られた Li-Yau 型不等式の一つの直接的な帰結として、閉曲線の弾性流が「すべての時間で埋め込みとなる」ための最適なエネルギー閾値が得られる。しかしながら、より自然な問題である「初期値の埋め込み性が保存される」ための閾値については未解決であった。本共同研究ではこの問題を完全に解決し、「埋め込み性の破れ」を防ぐための最適な定量的条件を与えることに初めて成功した。この際、特に余次元が 1 か 2 以上かで閾値が異なることを発見した。余次元 2 以上においては、(1) の成果を直接応用することで閾値を与える形状を決定した。一方で余次元 1 の場合においては、位相的手法と解析的手法を織り交ぜた議論により閾値を与える新しい形状を発見した。論文は American Journal of Mathematics に掲載受理された。

また剣持智哉氏(名古屋大学)との共同研究により、弾性流に対する Huisken の問題、すなわち初期時刻において上半平面に含まれているがしばらく経つと下半平面に含まれるような「移行

解」の存在を考察した。本研究では、開曲線に対する長さ保存弾性流に対し、移行解が存在することを証明した。これは弾性流に留まらず高階放物型幾何学流において移行解が存在することを証明した初めての結果であると思われる。また数値解析により、より広い枠組みにおける弾性流で多くの移行解が存在し得ることを発見した。論文は *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* に掲載された。

(3) p-弾性曲線の基礎理論

吉澤研介氏(長崎大学)との一連の共同研究により、平面 p-弾性曲線の基礎理論の整備、およびそれに基づく新しい安定性理論の創始を行った。古典的な Euler の弾性曲線($p=2$)の分類は Euler 自身によって 18 世紀になされている。また 19 世紀には Saalschütz により Jacobi の楕円関数を用いた明示公式が得られている。一方、曲げエネルギーの曲率の冪を p 乗にすることで自然に定まる p-弾性曲線については、正則性の喪失や flat-core と呼ばれる特殊な解の出現など興味深い現象は知られていたが、その分類や Saalschütz 型の公式については未解決であった。本研究ではまず、新しいタイプの p-楕円関数を導入することで、平面 p-弾性曲線($p>1$)の完全な分類を与え、また Saalschütz 型の明示公式や最適な正則性を与えることに成功した。論文は *Annali di Matematica Pura ed Applicata* に掲載受理された。

また上記の臨界点の分類を境界値問題に応用し、pinned boundary condition の下で臨界点およびエネルギー最小解の完全な分類を行った。またその帰結として、平面曲線の p-曲げエネルギーに対する Li-Yau 型不等式や p-弾性ネットワーク問題の最小解の存在定理を得た。特に Li-Yau 型不等式においては、平面閉曲線(余次元 1)の場合においてもすべての多重度で不等式が最適となるような唯一の指数 $p=1.5728\dots$ が存在することを発見した。これは古典的な $p=2$ の範囲だけでは観察できなかった顕著な現象である。論文は *Indiana University Mathematics Journal* に掲載受理された。

更に続く研究において、平面曲線の曲率に依存する非常に一般的なクラスの変分問題に対し、エネルギー最小解や極小解(安定解)が満たすある種の最適な剛性原理(必要条件)を得た。この理論は特に p-弾性曲線に直接応用可能であり、特に重要な帰結として、一般の closed p-elastica および非退化な pinned p-elastica の二つの場合において、臨界点の安定性の完全な分類を行った。論文は *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)* に掲載された。

最後に、上記の研究において安定性が不明であった退化 pinned p-elastica のうち、alternating flat-core と呼ばれるクラスについては実際に安定になることを発見した。これは方程式の退化性が変分的安定性に直接寄与し得ることを発見した興味深い結果であると思われる。論文は現在投稿中。

(4) Topping 予想と Plateau-Douglas 問題

凸曲線に対する Gage の不等式を動機づけとして、凸曲面に対する Willmore エネルギーの評価を行い、特に等周比との最適なスケール関係を得た。またそこから派生して、一般閉曲面の平均曲率と直径の最適な関係に関する Topping 予想の研究も行い、軸対称単連結の場合に予想を解決した。これは最適形状を含む非凸曲面のクラスにおいて初めての結果である。論文は *Selecta Mathematica* に掲載された。

更に、閉曲面の Topping 型直径評価から一般の境界付き曲面に対する直径評価を直接導出する新たな幾何学的手法を開発した。この評価は Topping 予想が正しければある種の最適性を持つという点で、Topping 予想に関する新しい状況証拠と見なすことができる。またこの評価の応用として、極小曲面に関する Plateau-Douglas 問題に関する新しい非存在定理を得た。論文は *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* に掲載された。

(5) 距離関数の特異点集合の構造

田中實氏(東海大学)との共同研究により、一般の完備 Finsler 多様体の一般の閉部分集合からの距離関数の特異点集合が、デルタ凸超曲面の可算和と余次元 2 以上の除外集合の和集合で表示できることを示した。これは通常のユークリッド空間においても新しい結果であり、またデルタ凸正則性は最適である。更に二次元の場合においてはより精密な構造定理を得ることに成功した。論文は *Communications on Pure and Applied Mathematics* に掲載受理された。

(6) 平面弾性曲線の一意最小性

古典的な Euler の弾性曲線の境界値問題について、Glen Wheeler 氏 (University of Wollongong)

との共同研究により、平面弾性曲線が単調な曲率を持つならば必ずエネルギー最小解になるという新しい原理を発見した。またこの成果を長さ処罰問題にも部分的に拡張し、その応用として線状化問題における解の一意性の結果を generic な境界角度で示した。論文は現在投稿中。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計12件（うち査読付論文 11件 / うち国際共著 2件 / うちオープンアクセス 3件）

1. 著者名 Tatsuya Miura	4. 巻 62
2. 論文標題 Li-Yau type inequality for curves in any codimension	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Calculus of Variations and Partial Differential Equations	6. 最初と最後の頁 Paper No. 216
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00526-023-02559-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Tomoya Kemmochi; Tatsuya Miura	4. 巻 185
2. 論文標題 Migrating elastic flows	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Journal de Mathematiques Pures et Appliquees	6. 最初と最後の頁 47-62
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.matpur.2024.02.003	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Tatsuya Miura; Minoru Tanaka	4. 巻 -
2. 論文標題 Delta-convex structure of the singular set of distance functions	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Communications on Pure and Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1002/cpa.22195	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Tatsuya Miura; Kensuke Yoshizawa	4. 巻 -
2. 論文標題 Complete classification of planar p-elasticae	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Annali di Matematica Pura ed Applicata	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10231-024-01445-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Tatsuya Miura; Kensuke Yoshizawa	4. 巻 -
2. 論文標題 General rigidity principles for stable and minimal elastic curves	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Journal für die Reine und Angewandte Mathematik (Crelles Journal)	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1515/crelle-2024-0018	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Tatsuya Miura; Kensuke Yoshizawa	4. 巻 -
2. 論文標題 Pinned planar p-elasticae	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Indiana University Mathematics Journal	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Tatsuya Miura; Marius Müller; Fabian Rupp	4. 巻 -
2. 論文標題 Optimal thresholds for preserving embeddedness of elastic flows	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 American Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Miura Tatsuya	4. 巻 23
2. 論文標題 A diameter bound for compact surfaces and the Plateau-Douglas problem	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze	6. 最初と最後の頁 1707 ~ 1721
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2422/2036-2145.202011_006	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Miura Tatsuya	4. 巻 27
2. 論文標題 Geometric inequalities involving mean curvature for closed surfaces	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Selecta Mathematica	6. 最初と最後の頁 24 pp
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00029-021-00696-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Miura Tatsuya, Okabe Shinya	4. 巻 239
2. 論文標題 On the Isoperimetric Inequality and Surface Diffusion Flow for Multiply Winding Curves	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Archive for Rational Mechanics and Analysis	6. 最初と最後の頁 1111 ~ 1129
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00205-020-01591-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Miura Tatsuya, Otto Felix	4. 巻 381
2. 論文標題 Sharp boundary -regularity of optimal transport maps	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Advances in Mathematics	6. 最初と最後の頁 107603
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.aim.2021.107603	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Miura Tatsuya	4. 巻 3
2. 論文標題 Polar tangential angles and free elasticae	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Mathematics in Engineering	6. 最初と最後の頁 1 ~ 12
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3934/mine.2021034	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

[学会発表] 計31件(うち招待講演 28件/うち国際学会 14件)

1. 発表者名 三浦達哉
2. 発表標題 Migrating elastic flows
3. 学会等名 MATRIX-RIMS Tandem Workshop: Evolutionary partial differential equations and applications (招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 三浦達哉
2. 発表標題 Stabilization phenomenon in p-elastica theory
3. 学会等名 リーマン幾何と幾何解析(招待講演)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 三浦達哉
2. 発表標題 Delta-convex structure of the singular set of distance functions
3. 学会等名 松山解析セミナー 2024(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 三浦達哉
2. 発表標題 Delta-convex structure of the singular set of distance functions
3. 学会等名 2024 Japan-Korea Workshop on Nonlinear PDEs and Its Applications(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 三浦達哉
2. 発表標題 Classification and stability theory of planar p-elasticae
3. 学会等名 Euro-Japanese Conference on Nonlinear Diffusion (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 劔持智哉; 三浦達哉
2. 発表標題 Migrating elastic flows
3. 学会等名 日本数学会 2023年度秋季総合分科会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 三浦達哉; Marius Muller; Fabian Rupp
2. 発表標題 Optimal thresholds for preserving embeddedness of elastic flows
3. 学会等名 日本数学会 2023年度秋季総合分科会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 三浦達哉; 吉澤研介
2. 発表標題 Complete classification of planar p-elasticae
3. 学会等名 Geometric Theory of Optimal Control (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 三浦達哉
2. 発表標題 On the Plateau-Douglas problem and Topping's diameter conjecture
3. 学会等名 部分多様体論と幾何解析の新展開 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 三浦達哉
2. 発表標題 Li-Yau type inequality for curves and applications
3. 学会等名 Workshop on Non-compact Variational Problems and Related Topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 三浦達哉
2. 発表標題 Euler's elastica: Old and new
3. 学会等名 MSI Colloquium 2022 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 三浦達哉
2. 発表標題 On the fine structure of the singular set of distance functions
3. 学会等名 第40回九州における偏微分方程式研究集会 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 三浦達哉, 吉澤研介
2. 発表標題 Complete classification of planar p-elasticae
3. 学会等名 日本数学会2023年度年会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 三浦達哉
2. 発表標題 Topping の直径予想について
3. 学会等名 東工大幾何セミナー (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 三浦達哉
2. 発表標題 曲がる物体の数学解析
3. 学会等名 ロボティクス・メカトロニクス 講演会 2021 in Osaka (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 三浦達哉
2. 発表標題 曲線の曲げエネルギーと自己交叉
3. 学会等名 筑波大学微分幾何学セミナー (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 三浦達哉
2. 発表標題 Li-Yau type inequality for curves and applications
3. 学会等名 解析学火曜セミナー (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 三浦達哉
2. 発表標題 Li-Yau type inequality for curves and applications
3. 学会等名 Asia-Pacific Analysis and PDE Seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 三浦達哉
2. 発表標題 Variational analysis of self-intersecting elastic curves
3. 学会等名 15th International Conference on Free Boundary Problems (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 三浦達哉
2. 発表標題 Optimal thresholds for preserving embeddedness of elastic flows
3. 学会等名 RIMS研究集会 (公開型) 「発展方程式の広がり: 理論的基礎から実践的応用まで」 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 三浦達哉
2. 発表標題 Li-Yau type inequality for curves and applications
3. 学会等名 東北大学 応用数理解析セミナー（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 三浦達哉
2. 発表標題 A diameter bound for compact surfaces and the Plateau-Douglas problem
3. 学会等名 楕円型・放物型微分方程式研究集会（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 三浦達哉
2. 発表標題 Variational analysis of self-intersecting elastic curves
3. 学会等名 微分方程式の総合的研究（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 三浦達哉
2. 発表標題 軸対称曲面に対する Topping 予想の証明
3. 学会等名 第11回室蘭非線形解析研究会（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 三浦達哉
2. 発表標題 On the isoperimetric inequality and surface diffusion flow for multiply winding curves
3. 学会等名 Lisbon WADE seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 三浦達哉
2. 発表標題 A nonexistence theorem in the Plateau-Douglas problem
3. 学会等名 Surface and Interface Dynamics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 三浦達哉
2. 発表標題 On Topping's conjecture and minimal surfaces
3. 学会等名 応用解析研究会 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 三浦達哉
2. 発表標題 On the isoperimetric inequality and surface diffusion flow for multiply winding curves
3. 学会等名 京都大学 NLPDE セミナー (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 三浦達哉
2. 発表標題 On the isoperimetric inequality and surface diffusion flow for multiply winding curves
3. 学会等名 2020 Seoul-Tokyo Conference - Partial Differential Equations - (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 三浦達哉
2. 発表標題 A variational approach to boundary regularity of optimal transport maps
3. 学会等名 Arbeitsgemeinschaft ANGEWANDTE ANALYSIS (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 三浦達哉
2. 発表標題 曲げエネルギーと曲線の形
3. 学会等名 令和2(2020)年度育志賞研究発表会(招待講演)
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------