

令和 6 年 6 月 3 日現在

機関番号：14501

研究種目：若手研究

研究期間：2020～2023

課題番号：20K14345

研究課題名（和文）物体壁面が粘性流体に与える効果の数学解析

研究課題名（英文）Mathematical analysis of effect of boundary on viscous fluid

研究代表者

檜垣 充朗（Higaki, Mitsuo）

神戸大学・理学研究科・准教授

研究者番号：20868202

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,300,000 円

研究成果の概要（和文）：水や空気などの粘性流体が物体壁面から受ける効果を解析することを目的とし、典型的な問題として、粗面を持つ領域および二次元物体の外部においてNavier-Stokes方程式を考察した。主な研究成果としては、粗面John領域における線形/非線形定常方程式の境界正則性理論の確立、壁面吸込による定常流れの局在化効果の解析とその三次元軸対称流れへの応用、臨界減衰する吸込流の二次元円板外部における漸近安定性の証明の三つが挙げられる。

研究成果の学術的意義や社会的意義

流体方程式の境界正則性理論をJohn領域において確立できたことは理論・応用の両面において意義深い。実際、John領域はKoch雪片などのフラクタル境界を持つ領域を含むクラスとして知られており、自然界で見られる粗面や複雑境界のモデルとしてより妥当なものである。また、壁面吸込を伴う流れがNavier-Stokes方程式の解にある種の安定化効果を与えることを、その周りにおける非線形方程式の定常解の存在や擾乱に対する長時間安定性といった多角的な観点から捉えた。これは特有の困難が知られる平面流体の数学理論の進展につながる成果であるため意義深い。

研究成果の概要（英文）：This research project aims to investigate the effect of boundaries on viscous fluids such as water and air. As typical problems, the Navier-Stokes system is considered in a domain with rough boundaries and in the exterior domain to a two-dimensional obstacle. The three main results are: establishment of boundary regularity theory for the linear/nonlinear steady system in rough John domains, analysis of the localization effect of wall suction on steady flows and its application to three-dimensional axisymmetric flows, and the proof of asymptotic stability of a suction flow with critical decay in an exterior disk.

研究分野：Navier-Stokes方程式の境界値問題

キーワード：Navier-Stokes方程式 境界層理論 壁法則 正則性理論 John領域 均質化理論 外部問題 スペクトル理論

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

物体壁面付近の流れを考える際には、水や空気などの流体は粘性流体として扱われる。粘性流体に対しては、壁面において流体の速度が壁面の速度と壁面上で一致して滑りがないという粘着条件を課すことが多い。粘性流体の運動は Navier-Stokes 方程式という非線形偏微分方程式系によって記述される。しかしながら、非自明な境界(壁面)が無い全空間の場合であっても、その複雑な非線形性と非局所性により、数学的には基本的であっても未解決の問題も多く知られている。数学解析の定性的・定量的側面の両方に困難を引き起こす原因の一つに、ある時点での解の挙動が局所的な量だけではなく全体の場合にも依存しているという、方程式の非局所性が挙げられる。これは解の連続性や微分可能性といった正則性を考える際に顕著に現れ、線形化方程式である Stokes 方程式についても同様であることが知られている。さらに、境界付近における解の正則性を考える場合は、粘着境界条件と非局所性のため状況はより複雑になり、例えば放物型偏微分方程式の正則性理論では現れない解の特異性が Kang(2005)によって指摘されている。

より現実的な問題を数理的にモデル化する場合、現実の流体が接する壁面は、巨視的には滑らかなようでも、微視的な粗さを持つ境界と見なされることが多い。そのため、表面の粗い物体壁面付近の粘性流体の数値構造を調べることは、基本的かつ重要である。その一方、このような流れを数値的に直接調べようとすると、膨大な計算コストがかかり実用的ではない。むしろ、境界付近で生成される小さなスケールの流れが大きな流れに対して平均的に与える(すなわち均質化された)影響を理解することの方が、全体の流れの構造を数学的に理解する上では有用である。流体力学における壁法則とは、粗面を滑らかな境界としてモデル化する代わりに粗さに依存した滑り境界条件を上手く課す手法であり、流れの構造解析に有効である。しかしながら、流体力学における壁法則の議論はあくまでも形式的なものだったため、これまでの壁法則の数学的研究では、その正当性の証明に重点が置かれてきた。先行研究により、その数学的正当化の理論については整備された状況にあるが、応用まで含めた壁法則の数学的理解は十分でなかった。

平面流体の研究は流体力学において基本的である。回転などの運動や速度場を生成する壁面の機構を伴う二次元物体を考える際は、それに応じた物体周りの流れの性質を理解することが重要となる。これは Navier-Stokes 方程式の外部問題として定式化される。空間三次元の対応する問題については、適切な付与データに対するスケール臨界減衰 $O(|x|^{-1})$ の定常解の存在、定常解の擾乱に対する漸近安定性が Borchers-Miyakawa(1995)により証明されている。物体運動や壁面機構を反映した定常解の空間遠方における漸近挙動の結果も知られており、数学的な一般論が確立されたといえる状況にある。しかしながら、空間二次元の場合、スケール臨界減衰する定常解の存在やその安定性の研究は各論的なものに留まっている。実際、埋め込みの不成立や Laplacian の基本解の減衰構造に起因する空間二次元特有の困難のため、定常解の一般的な存在定理は現在も未解決の難問である。これらの困難は付与データ全てに対称性を課すことで緩和されるものの、対称な領域において非対称な外力を付与するという比較的単純な問題設定においてさえ、解の存在については未知の点が多い。また、Hamel(1917)によって定常厳密解の族が得られているが、これにはスケール臨界減衰する解が含まれる。このことを原因とする本質的な困難があり、例えば係数が小さいと仮定しても、Hamel 解の擾乱に対する漸近安定性についての完全な解答は得られていない。以上のように、一般論の確立という観点からは、平面流体の数学的研究は未だ乏しく、空間三次元の場合と比べても十分な結果が蓄積されていなかった。

2. 研究の目的

本研究では、水や空気などの粘性流体が物体壁面から受ける効果を解析することを目的としている。その典型的な問題として、粗面を持つ領域および二次元物体の外部において Navier-Stokes 方程式を考察する。粗面領域においては、偏微分方程式に対する定量的均質化理論の昨今の進展を背景にしつつ、方程式の境界正則性理論を考察する。さらに、解の正則性と流体力学における壁法則との関係を明らかにする。二次元外部領域においては、付与データに対する定常解の存在定理や、定常厳密解である Hamel 解の擾乱に対する漸近安定性などを考察する。物体運動や壁面機構が定常/非定常問題の解に及ぼす影響を明らかにすることが主なテーマである。

3. 研究の方法

粗面領域における正則性理論の研究については、Navier-Stokes 方程式や楕円型方程式の正則性理論の専門家である Christophe Prange 氏 (CY Cergy Paris University) および楕円型方程式の均質化理論の専門家である Jinping Zhuge 氏 (Morningside Center of Mathematics) と共同で行う。境界の正則性が低い領域においては、方程式の解に対して古典的な境界正則性評価は一般には成立しない。そのため、ここでは均質化理論における large-scale 正則性評価を考える。ただし、既存の偏微分方程式の均質化理論の大部分は、領域の内部で課された特異係数を有する方程式に対して適用可能なものであり、本研究のように境界に特異性がある状況を考える際には有用ではない。そこで、本研究独自の課題として、境界付近における解の挙動を捉える関数(境界層補正)の構成と積分評価、さらに解の正則性と壁法則との関係の解明に取り組む。

二次元物体外部の定常 Navier-Stokes 方程式の研究については、線形化方程式の基本解が空間遠方で対数増大するため、Banach の不動点定理などの逐次法を用いて解の構成を行えない点が大きな問題である。Hillairet-Wittwer(2013)は、円板外部において、Hamel 解の一つである回転流の周りで方程式を摂動することで、回転のパラメータが大きければ、対応する線形化問題の基本解の減衰が改良されることを明らかにした。さらに、この線形評価を用いて、非対称な付与データに対する非線形方程式の解の存在を証明した。これは、物体回転による定常流れの局在化の効果を捉えた結果と考えられる。そこで、より自然に流れの局在化が期待される、吸込流と回転流の一次結合として表せる Hamel 解の周りにおける非線形方程式の可解性を考察する。

この Hamel 解の擾乱に対する漸近安定性の研究については、そのスケール臨界減衰 $O(|x|^{-1})$ が問題の本質的な困難を引き起こす。実際、空間三次元の場合と異なり、非有界領域における Hardy の不等式に対応する線形化問題の摂動項に適用できない。それどころか、摂動項に対する下からの評価が Guillod(2017)により指摘されている。そのため、漸近安定性を導く時間減衰評価の導出はデリケートな問題となる。本研究では、領域の対称性を利用した明示的かつ精密な計算によって、線形化問題に対応する線形作用素のスペクトルを解析する。

4. 研究成果

以下、本研究の主たる成果について、三つの項目に分けて説明する。

(1)粗面領域における定常 Navier-Stokes/Stokes 方程式の正則性理論

まず、Prange 氏との共同研究として、Lipschitz 境界関数により微小摂動された半空間において、定常 Navier-Stokes 方程式の弱解に対する large-scale 正則性評価を証明した(出版済み)。証明では、楕円型方程式の均質化問題を扱った Avellaneda-Lin(1987,1989)のコンパクト性の議論を非線形問題へ応用する。その際、粗面から離れた位置における境界層補正の挙動の精緻な評価により、境界が周期的な場合に正則性が改良されることを明らかにし、流体力学における壁法則との関係を明らかにした。次に、Prange 氏と Zhuge 氏との共同研究として、上述の結果を John 領域へ拡張することに成功した(出版済み)。証明では、Armstrong-Smart(2016)、Armstrong-Shen(2016)、Shen(2017)を嚆矢とする定量的均質化の手法を適用する。さらに、Zhuge 氏との共同研究として、周期的 John 領域において、定常 Stokes 方程式の境界層補正を任意の次数に対して構成した(出版済み)。その応用として、定常 Stokes 方程式の弱解に対する任意次数の large-scale 正則性評価を証明した。この評価は方程式の Liouville 型定理を導くものであり、多項式増大度を持つ弱解を完全に特徴づけることができる。また、Prange 氏との共同研究において得られた「周期性が導く正則性の改良」という観点から、新たに任意次数の壁法則を導出した。

これら一連の共同研究において得られた諸結果は、方程式の解の境界正則性を multiscale な問題として捉えた際に、たとえ境界の正則性が低い場合であっても、ある scale 以上では正則性が改善されることを意味する。また、John 領域は Koch 雪片などのフラクタル境界を持つ領域を含むクラスとして知られており、自然界で見られる粗面や複雑境界のモデルとしてより妥当なものである。さらに、発散作用素の右逆写像の存在が知られており、Navier-Stokes/Stokes 方程式の解析を行う上で必要最低限の性質を備えている。そのため、John 領域における非圧縮性粘性流体の正則性理論は、理論・応用の両面において大きな貢献につながる可能性がある。

これらの成果を基礎とする現在進展中の研究を述べる。まず、Zhuge 氏との共同研究の結果は、定常 Stokes 方程式の解のある種の多項式展開と見なすことができ、関数の調和多項式による展開や関数論における Runge の定理と深く関係する。そこで、流体-構造相互作用や制御問題の専門家である Franck Sueur 氏(University of Bordeaux)と共に、非定常 Stokes 方程式に対する Runge 型の定理を考察している。また、Zhuge 氏との共同研究として、関数不等式などの確率解析の手法を取り入れつつ、ランダム環境における定常 Navier-Stokes 方程式を考察している。

(2)壁面吸込下における無限円柱周りの定常問題の解析

吸込境界条件の下で、二次元円板外部における Navier-Stokes 方程式の非対称定常解の存在を証明した(出版済み)。空間遠方で良い減衰構造を持つ非対称外力を付与データとして、解を臨界減衰するベクトル場のクラスで構成する。証明の鍵は、Hillairet-Wittwer(2013)と同様に、厳密定常解である吸込流と回転流の一次結合の周りの線形化問題の基本解を調べることである。実際、吸引のパラメータが大きければ、基本解の減衰構造が改良されることが示される。ただし、Hillairet-Wittwer(2013)と違い、本結果では回転流の係数は任意に取れる。そのため、吸込による定常流れの局在化の効果は、回転による局在化とメカニズムが異なることが分かる。

壁面吸込による流れの局在化は、三次元的な定常流れに対しても期待されるものである。そこで、無限に長い円柱外部における三次元定常 Navier-Stokes 方程式について、水平方向には減衰するが垂直方向には減衰しないベクトル場のクラスでの解の存在定理を考察した。ただし、円柱壁面においては吸込境界条件を課し、吸引のパラメータは大きいと仮定する。まず、指導学生の堀内亮真氏(神戸大学)と共に、垂直方向に一樣な付与外力に対する解の存在を示した(投稿済み)。また、垂直方向に周期的でない軸対称な付与外力に対する解の存在を示した(投稿済み)。これらは、特有の困難が知られる二次元外部問題を含む問題設定において、付与データに対する

(水平方向への)減衰解を与える初めての結果である。どちらの証明でも、上述の二次元問題と同様に、吸込流の周りの線形化方程式に着目し、その基本解の減衰構造を示すことが鍵となる。加えて、周期性が欠如した状況を扱う後者の証明では、二次元非定常 Stokes 方程式のレゾルベント問題の解析に類似した困難が現れるため、技巧的な議論が必要となる。投稿論文では、基本解の正值性を活用することで、線形化問題の解の精緻な評価を与えることに成功した。

(3)臨界減衰する吸込流の二次元円板外部における安定性解析

二次元円板外部において、全ての付与データが十分小さいという仮定の下で、吸込流と回転流の一次結合として表せる Hamel 解の擾乱に対する漸近安定性を証明した(出版済み)。初期擾乱のクラスとしてはスケール臨界空間である L^2 空間を考える。本結果の成立は、空間遠方においてより早く減衰する初期擾乱に対しては既に知られていたが、その証明は初期擾乱が単に L^2 空間に属する場合には適用できないものであった。本結果の証明は対応する線形化作用素のスペクトル解析に基づいており、特に離散スペクトルを回転と吸引のパラメータを含むある正則関数の零点として特徴づけることが鍵となる。この特徴づけの副産物として、吸込流が流れの長時間挙動においてある種の安定化効果を持つことが明らかになった。この事実は、(2)において述べた定常問題における線形化問題の基本解の減衰構造の改良と整合しており興味深い。

5 . 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件 / うち国際共著 3件 / うちオープンアクセス 0件）

1 . 著者名 Mitsuo Higaki, Jinping Zhuge	4 . 巻 247
2 . 論文標題 Higher-Order Boundary Layers and Regularity for Stokes Systems over Rough Boundaries	5 . 発行年 2023年
3 . 雑誌名 Archive for Rational Mechanics and Analysis	6 . 最初と最後の頁 1 ~ 61
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00205-023-01899-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1 . 著者名 Mitsuo Higaki	4 . 巻 286
2 . 論文標題 Stability of planar exterior stationary flows with suction	5 . 発行年 2024年
3 . 雑誌名 Journal of Functional Analysis	6 . 最初と最後の頁 1 ~ 48
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jfa.2023.110272	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1 . 著者名 Higaki Mitsuo	4 . 巻 360
2 . 論文標題 Existence of planar non-symmetric stationary flows with large flux in an exterior disk	5 . 発行年 2023年
3 . 雑誌名 Journal of Differential Equations	6 . 最初と最後の頁 182 ~ 200
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jde.2023.02.057	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1 . 著者名 Higaki Mitsuo、Prange Christophe、Zhuge Jinping	4 . 巻 17
2 . 論文標題 Large-scale regularity for the stationaryNavier?Stokes equations over non-Lipschitz boundaries	5 . 発行年 2024年
3 . 雑誌名 Analysis & PDE	6 . 最初と最後の頁 171 ~ 242
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2140/apde.2024.17.171	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Mitsuo Higaki, Christophe Prange	4. 巻 59
2. 論文標題 Regularity for the stationary Navier-Stokes equations over bumpy boundaries and a local wall law	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Calculus of Variations and Partial Differential Equations	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00526-020-01789-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計10件（うち招待講演 10件 / うち国際学会 5件）

1. 発表者名 Mitsuo Higaki
2. 発表標題 Existence of steady Navier-Stokes flows exterior to an infinite cylinder
3. 学会等名 Seminaire de Physique Mathematique - EDP (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Mitsuo Higaki
2. 発表標題 On Navier-Stokes flows exterior to an infinite cylinder
3. 学会等名 East Asian Workshop on PDEs from Kinetics and Continuum Mechanics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Mitsuo Higaki
2. 発表標題 Wall laws over rough boundaries
3. 学会等名 Mathematical Analysis of Viscous Incompressible Fluid (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1．発表者名 檜垣充朗
2．発表標題 円柱外部における軸対称Navier-Stokes定常流の存在定理
3．学会等名 流体数学セミナー（招待講演）
4．発表年 2024年

1．発表者名 Mitsuo Higaki
2．発表標題 Planar Navier-Stokes flows with flux in exterior domains
3．学会等名 International Workshop on Multiphase Flows: Analysis, Modelling and Numerics（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2022年

1．発表者名 檜垣充朗
2．発表標題 粗面領域における Navier-Stokes 方程式の正則性理論と局所壁法則
3．学会等名 研究集会「微分方程式の総合的研究」（招待講演）
4．発表年 2021年

1．発表者名 檜垣充朗
2．発表標題 Large-scale boundary regularity for stationary viscous incompressible flows
3．学会等名 第13回名古屋微分方程式研究集会（招待講演）
4．発表年 2022年

1. 発表者名 檜垣充朗
2. 発表標題 Regularity for the stationary Navier-Stokes equations over bumpy boundaries and a local wall law
3. 学会等名 京都大学 NLPDE セミナー（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 檜垣充朗
2. 発表標題 Regularity for the stationary Navier-Stokes equations over bumpy boundaries and a local wall law
3. 学会等名 第45回偏微分方程式論札幌シンポジウム（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Mitsuo Higaki
2. 発表標題 Regularity Estimates for the Stationary Navier-Stokes Equations Over Bumpy Boundaries
3. 学会等名 International Workshop on Multiphase Flows: Analysis, Modelling and Numerics（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織			
	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
フランス	ボルドー大学			
中国	Morningside Center of Mathematics			
フランス	セルジー大学			