

令和 6 年 6 月 18 日現在

機関番号：32660

研究種目：若手研究

研究期間：2020～2023

課題番号：20K14348

研究課題名（和文）渦糸の相互作用～現象解明を目指して～

研究課題名（英文）Interaction of Vortex Filaments -Towards a Deeper Understanding of Vortex Dynamics-

研究代表者

相木 雅次（Aiki, Masashi）

東京理科大学・創域理工学部数理科学科・講師

研究者番号：90734400

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,200,000 円

研究成果の概要（和文）：本研究は、航空機の翼端渦や鈴輪の追い越し現象など、流体における細い渦構造の相互作用の数学的な定式化と解析を通じて複雑な渦運動に関する現象を解明するための基礎理論を構築することを目指すものである。特に、特徴的な挙動を示す渦運動の存在やその安定性に着目し、非線形偏微分方程式による運動の定式化と解の安定性解析を行い、様々な結果を得ることができた。具体的には、本研究課題に関する学術論文を2件（掲載済み1件、投稿中1件）発表することができた。また、同軸上に並んだ3つの渦輪の運動については、特徴的な挙動を示す解の存在を示唆する数値計算結果を得ることもできた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

流体における渦運動は、流体の運動を構成する重要な要素の1つであり、渦運動の詳細を数学的に解析することは、流体の運動を理解するための基礎理論を構築することに資するものである。また、細い渦構造の相互作用は航空機の翼端渦などにも表れる。これら渦の挙動や安定性を数学的に解析することによって翼端渦の影響を軽減し、航空機の飛行を効率化するための基礎理論を構築することにつながる。

研究成果の概要（英文）：The aim of this research project is to mathematically formulate and analyze the interaction of thin vortex structures within fluids. Specifically, we utilize nonlinear partial differential equations describing the motion of vortex filaments and investigate the existence and stability of solutions which correspond to particular motion patterns. In this regard, we were able to publish 2 research papers (1 accepted, 1 submitted). Furthermore, we investigated the motion pattern of three coaxial circular vortex filaments and obtained numerical evidence which suggests the existence of interesting motion patterns.

研究分野：数理解析学

キーワード：渦糸 非線形偏微分方程式 数学解析 安定性

1. 研究開始当初の背景

(1) 航空機の翼の端から発生する翼端渦、渦輪の追い越し現象、竜巻など、我々の身の回りは渦を伴う様々な流体の運動が存在し、これら現象を流体の基本理論に基づいた定式化によって解明することは学術的な価値だけでなく工学的な応用においても有用である。しかし、翼端渦や渦輪の追い越し現象など、複数の細い渦構造の相互作用が存在するとき、その複雑さもあり、これら現象を流体の基礎方程式に基づいて定式化および数学解析を行う試みは少ない。

(2) 翼端渦や渦輪においては流れの回転成分である渦度が中心軸付近に集中しているので、もっとも簡単な定式化としてその運動を「渦糸」の運動として記述することが考えられる。渦糸とは流体の渦度が曲線上に集中して分布したものをいうが、非圧縮非粘性流体に対して渦糸はラグランジュ保存量なので、実在する曲線として正当化される。渦糸の研究は古くから行われており、流体の渦度場から速度場を与える Biot-Savart の法則にある種の近似を施して得られた最初の非粘性モデル方程式は 1906 年に Da Rios [2] によって提唱され、この方程式は Localized Induction Equation (LIE) として知られている。LIE はその後、村上ら [4] や Arms and Hama [1] によってそれぞれ独立に再導出されているが、いずれも同じような近似を Biot-Savart の法則に適用して導出されている。他にも様々なモデル方程式が提唱されているが主として一本の渦糸の運動を表すモデル方程式である。

(3) これら研究背景を考慮し、本研究課題では複数の渦糸の相互作用を数学的に定式化及び解析することに着目した。

2. 研究の目的

本研究では、現象に則した複数の細い渦構造の相互作用の数学的定式化、解析、そしてモデルの妥当性の検証を目的とする。具体的な現象としては、翼端渦と渦輪の追い越し現象に焦点を絞って扱う。本研究においては複雑な現象から主要な特徴を抽出し、渦糸として定式化することによってより精密に扱えるようにする。また、渦糸に関する先行研究と比較し、本研究においては具体的な現象を表現した問題を扱うことによって数学的な進展のみならず、工学的応用も視野に入れているという意味では分野横断的な研究であるといえる。特に、航空機が飛ぶ際には翼端渦が抵抗となり、燃費が悪くなることが知られている。本研究はこのような影響を改善するための基礎理論を提供し得るものである。また、翼端渦の問題においては二本の渦糸の運動を記述する初期値 - 境界値問題を扱うが、渦糸の運動を表す方程式は、シュレディンガー方程式に代表されるような分散型の方程式である。本研究は、初期値問題が扱われることの多い分散型方程式および分散型方程式系に対する新たなアプローチを例示し、より広く初期値 - 境界値問題に取り組むことの意義を提示することも目的としている。

3. 研究の方法

本研究課題は、三つの問題に分けて取り組む。

(1) 問題 1：翼端渦の運動の解析

翼端渦の運動を解析することを目的とした課題として、二本の渦糸の相互作用の定式化とその可解性の証明に取り組む。特に、翼端渦を念頭において、

(2) 問題 2：渦輪の追い越し現象

同軸上に並んだ渦輪の運動を表す問題として、同軸上に並んだ円形の渦糸の運動を表す初期値問題の定式化と特徴的な運動パターンに対応する解の存在を証明することに取り組む。渦輪が周期的に互いの中を通過して追い越し合う現象（追い越し現象）など、特徴的な運動パターンを探すために、数値計算を並行して行う。

(3) 問題 3：特徴的な解の安定性

問題 1 と問題 2 の研究過程で現れた特徴的な運動に対応する解に対して安定性解析を行う。

4. 研究成果

本研究課題の成果について、問題ごとにまとめて報告する。問題1, 2においては、相木が[1]において導出したモデル方程式である

$$\partial_t \mathbf{x}_j = \Gamma_j \alpha \frac{\partial_s \mathbf{x}_j \times \partial_s^2 \mathbf{x}_j}{|\partial_s \mathbf{x}_j|^3} + \sum_{k \neq j} \Gamma_k \beta \frac{\partial_s \mathbf{x}_k \times (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k)}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k|^3} \quad (1)$$

を用いた。ここで、 \mathbf{x}_j は j 番目の渦系の位置ベクトルで、時刻 t においてパラメータ s によってパラメータ付けされているとする。 Γ_j は j 番目の渦系の渦の強さを表す実数パラメータ、 \times は三次元ユークリッド空間における外積を表し、 α, β は、方程式の導出過程で現れる正のパラメータである。方程式系(1)は、複数の渦系の相互作用を表した方程式系である。

- (1) 問題1については、翼端渦の挙動を表すように方程式系(1)に基づいた定式化を行った。航空機の翼の先端から発生する渦は航空機本体を基準に左右対称に並んでいると考えることができる。そのため、方程式系(1)の解に対しても同じ対称性を仮定することによって、二つの渦系の相互作用を以下の一つの渦系に対する問題に帰着することができた。

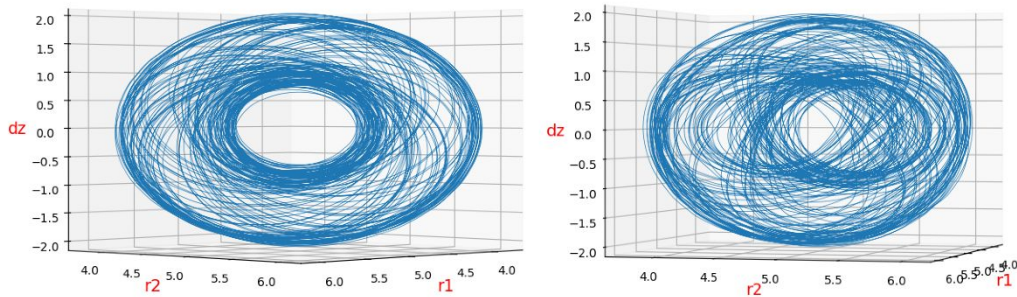
$$\partial_t \mathbf{x} = \Gamma \alpha \frac{\partial_s \mathbf{x} \times \partial_s^2 \mathbf{x}}{|\partial_s \mathbf{x}|^3} + \frac{\beta \Gamma (J \partial_s \mathbf{x}) \times (\mathbf{x} - J \mathbf{x})}{|\mathbf{x} - J \mathbf{x}|^3} \quad (2)$$

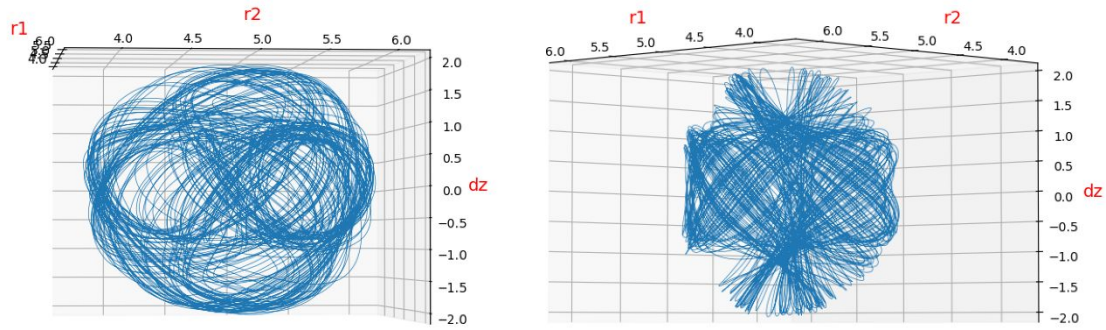
ここで、

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である。適切な初期値と境界条件の下で数学解析を行うのであるが、境界条件は、翼端から渦が発生する原理を考慮して設定する必要があるが、適切な境界条件の発見までには至らなかった。しかし、二本の渦系の相互作用を表す方程式系を単独の方程式に対する問題に帰着できたことは、大きな成果であると言える。

- (2) 問題2については、方程式系(1)を基に同軸上に並んだ渦輪の挙動を表す問題を解析した。具体的には、三つの渦輪が同軸上に並んだ状態を定式化した問題を扱った。この場合、方程式系(1)は、三つの渦輪それぞれの半径と軸上の位置に対する常微分方程式系へと変形される。得られる常微分方程式系は複雑な形をしており、解の性質を理論的に調べるのが困難であったため、数値計算を用いて特徴的な挙動を示す解の探索を行った。その結果、二つの渦輪の相互作用では現れないような挙動を示す解の存在が示唆された。具体的には、数値シミュレーション結果として以下のプロットが得られた。





上記プロットは、三つの渦輪のうち二つの渦輪の半径 (r_1, r_2) と、この二つの渦輪の相対距離 (dz) の軌跡を三次元プロットしたものである。四つの画像は、同じプロットを違う視点から見たものである。これらプロットから軌跡がトーラス状の面上に束縛されていることが示唆される。また、単純な周期軌道ではなく、トーラス面上を埋め尽くすような軌跡になっていると考えられる。そのような軌道は「概周期的である」というが、これは渦輪が二つの場合は発生しない現象であり、三つの渦輪の運動ならではの特徴的な挙動であると言える。今回の数値計算結果から、このような特徴的な挙動を示す解が方程式系(1)に存在する可能性が分かった。

- (3) 問題3については、複数の渦輪の相互作用を伴う運動の安定性を調べる第一歩として、単独の渦輪の安定性を解析した。単独の渦輪の運動を表す方程式として以下を用いた。

$$\partial_t \mathbf{x} = \partial_s \mathbf{x} \times \partial_s^2 \mathbf{x} \quad (3)$$

方程式系(3)は、Da Rios [3] によって提唱された局所誘導方程式と呼ばれる単独の渦系の運動を表す方程式である。方程式系(1)は、方程式(3)と同じ原理に基づいて導出されているため、複数の渦輪の安定性を解析する上で、単独の渦輪が方程式(3)に基づいてどのような挙動を示すかを調べることによって方程式系(1)に基づいた安定性を調べるための指針となりえる。方程式(3)に基づいた渦輪の運動の安定性については、幅広い摂動に対する安定性を扱い、摂動の成長が摂動の方向によって違うことが分かった。摂動の水平成分（渦輪の軸と垂直な平面成分）の大きさは、初期摂動から大きく変化しないが、軸方向の摂動は時間に比例して拡大することがあることを証明した。これら結果を専門学術誌へと投稿した。また、方程式(3)は橋本変換と呼ばれる未知変数の変換を介して非線形シュレディンガー方程式に変換されることが知られている。この対応によって渦輪はシュレディンガー方程式の平面波解に対応するが、渦輪の安定性解析で得られた解の評価を橋本変換を経由して平面波解に適用することによって平面波解の安定性を証明することができた。平面波解の安定性に関する結果も専門学術誌へと投稿し、掲載済みである。

< 参考文献 >

- [1] M. Aiki, On the existence of leapfrogging pair of circular vortex filaments, *Stud. Appl. Math.*, **143** (2019), no.3, pp. 213-243.
- [2] R.J. Arms and F.R. Hama, Localized-induction concept on a curved vortex and motion of an elliptic vortex ring, *Phys. Fluids*, **8** (1965), no.4, pp. 553-559.
- [3] L. S. Da Rios, Sul Moto D'un Liquido Indefinito Con Un Filetto Vorticoso Di Forma Qualunque (in Italian), *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **22** (1906), no.1, pp. 117-135.
- [4] Y. Murakami, H. Takahashi, Y. Ukita, and S. Fujiwara, On the vibration of a vortex filament (in Japanese), *Applied Physics Colloquium* (in Japanese), **6** (1937), pp. 1-5.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件／うち国際共著 0件／うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Aiki Masashi	4. 巻 55
2. 論文標題 The Hasimoto Transformation for a Finite Length Vortex Filament and its Application	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 SIAM Journal on Mathematical Analysis	6. 最初と最後の頁 7273 ~ 7295
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1137/22M1524424	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計9件（うち招待講演 9件／うち国際学会 8件）

1. 発表者名 Masashi Aiki
2. 発表標題 The Hasimoto Transformation for a Finite Length Vortex Filament and its Application
3. 学会等名 RIMS Workshop on Mathematical Analysis in Fluid and Gas Dynamics（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Masashi Aiki
2. 発表標題 On the Interaction of a Pair of Coaxial Circular Vortex Filaments
3. 学会等名 The 13th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 相木雅次
2. 発表標題 On the Head-on Collision of Coaxial Vortex Rings
3. 学会等名 Quasi-linear PDEs in fluids（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2021年

1．発表者名 相木雅次
2．発表標題 The Hasimoto Transformation for a Finite Length Vortex Filament and its Application
3．学会等名 RIMS Workshop on Mathematical Analysis in Fluid and Gas Dynamics (招待講演) (国際学会)
4．発表年 2023年

1．発表者名 相木雅次
2．発表標題 On the Interaction of a Pair of Coaxial Circular Vortex Filaments
3．学会等名 The 13th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications (招待講演) (国際学会)
4．発表年 2023年

1．発表者名 Masashi Aiki
2．発表標題 The Hasimoto Transform for a Finite Length Vortex Filament and its Application
3．学会等名 The 40th Kyushu Symposium on Partial Differential Equations (招待講演) (国際学会)
4．発表年 2023年

1．発表者名 相木雅次
2．発表標題 On the Interaction of a Pair of Coaxial Circular Vortex Filament
3．学会等名 2020年度 第1回明治非線型数理セミナー (招待講演)
4．発表年 2020年

1. 発表者名 相木雅次
2. 発表標題 On the head-on collision of coaxial vortex rings
3. 学会等名 Mathematical Analysis of Viscous Incompressible Fluid (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 相木雅次
2. 発表標題 On the Head-on Collision of Coaxial Vortex Rings
3. 学会等名 Quasi-linear PDEs in fluids (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織			
	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------