

令和 6 年 6 月 23 日現在

機関番号：32660

研究種目：若手研究

研究期間：2020～2023

課題番号：20K14354

研究課題名(和文)直観主義数学の逆数学的解析

研究課題名(英文)Reverse mathematical analysis of intuitionistic mathematics

研究代表者

藤原 誠 (Fujiwara, Makoto)

東京理科大学・理学部第一部応用数学科・助教

研究者番号：20779095

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：直観主義数学における主要概念であるバール空間から自然数集合への関数の連続性を構成的逆数学の観点から解析し、「バー再帰を持つモジュラスによって各点連続であること」によって特徴付けた。また、直観主義数学に端を発する単位区間上の一様連続性定理を逆数学的に解析し、「モジュラスに連続性を加味した単位区間上の連続関数に対する一様連続性定理」が弱い関数存在公理しか含まない直観主義有限型算術体系上で完全二分岐木に対する決定可能ファン定理と同値になることを示した。さらに、直観主義数学の逆数学的解析のための枠組み研究として、直観主義算術上の論理公理の階層構造と冠頭標準形定理及び保存拡大性定理の関係性を解明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究は20世紀初等にブラウワーとその弟子たちによって直観主義数学における主要概念である関数の連続性概念や直観主義数学に端を発し現代数学に通じる一様連続性定理を現代的立場から再考察したものである。本研究の学術的意義は、直観主義数学における強い連続性の概念や通常の数学では測れない連続性概念の間の差異を通常の数学の部分公理系である現代的構成的数学の立場から基礎付けた点にある。また、直観主義算術上の論理公理の階層構造と冠頭標準形定理及び保存拡大性定理の関係性の研究の成果は、通常の数学と現代的構成的数学の中間に位置する数学的理論を調べるための足掛かりとなるものである。

研究成果の概要(英文)：We investigated the notion of continuity in Brouwer's intuitionistic mathematics for functions from the Baire space to the set of natural numbers from the perspective constructive reverse mathematics, and characterized it by the notion of pointwise continuity with having a modulus which possesses a bar recursor.

We also investigated the uniform continuity theorem which is from the intuitionistic mathematics, and showed that the decidable fan theorem for the complete binary tree is equivalent to the statement that every pointwise continuous real-valued function on the unit interval with a continuous modulus is uniformly continuous over intuitionistic finite-type arithmetic containing a weak choice principle only.

In addition, as related to the reverse mathematical analysis of intuitionistic mathematics, we investigated the relation between the hierarchy of logical axioms over intuitionistic arithmetic, semi-classical prenex normal form theorems, and semi-classical conservation theorems.

研究分野：数学基礎論

キーワード：連続性 一様連続性定理 直観主義算術 論理公理 冠頭標準形定理 保存拡大性定理

1. 研究開始当初の背景

19 世紀に素朴集合論におけるパラドックスが発見されて以降、数学の基礎に関する問題は当時の先駆的数学者らにとって重要な問題となった。20 世紀初頭、オランダの位相幾何学者 L. E. J. Brouwer は、数学的概念は数学者の精神の産物であり、その存在は構成によって示されるべきとする直観主義と呼ばれる立場をとり、Hilbert の形式主義に対抗する形で、独自の哲学に基づいて数学の再構築を試みた。Brouwer がその証明において認めた推論は構成的なものに限られており、通常の数学における推論よりも制限されたものであった。しかし、Brouwer は通常の数学では認めない特殊な公理を仮定したため、「全ての実関数は連続である」等の通常の数学とは明らかに矛盾する主張が示されてしまい、それゆえ、彼が提唱した直観主義数学[B27]は当時の数学者一般に受け入れられることはなかった。1960 年代になり、構成的な推論のみを用いた証明(以下では構成的証明と言う)を要請する構成的数学(特に解析学)[B67]が Bishop により展開された。Bishop の構成的数学は特殊な公理を仮定しないため通常の数学と矛盾しない。一方、現代数学基礎論の主流となっている方法論は数学を適切な形式体系の上で形式化し、形式化された数学の定理や理論を数学的に解析するというものである。この方法論は 20 世紀初頭に Brouwer と対立し形式主義の立場で数学の基礎付けを試みた Hilbert の研究構想に端を発する。ゲーデルの不完全性定理の発見により Hilbert の研究構想の完全な実現は不可能であることが判明したが、その延長として、1970 年代以降 Friedman, Simpson らによって大きく発展した逆数学[S09]と呼ばれる研究プログラムがある。逆数学では、諸定理の論理的複雑さを数学的に測るために、数学の定理や公理を弱い算術体系の上で形式化し、定理と公理と導出関係を調べる。通常数学では公理から定理を導くだけであるが、逆に「定理が公理を導く」ことも示すところが逆数学の特色であり、その名前の所以でもある。従来の Friedman/Simpson の逆数学(以下、古典的逆数学と言う)は、古典論理に基づいた弱い二階算術体系  $RCA_0$  の上で展開されてきた。 $RCA_0$  はおおそ計算可能な数学に対応しているが、古典論理(通常の数学の証明において許容される推論に対応する論理)に基づいているため、直観主義数学や構成的数学では許容されない非構成的な推論をも許容する。2000 年代になり、 $RCA_0$  の論理を古典論理から直観主義論理に置き換えて得られる  $RCA_0$  の部分体系  $iRCA_0$  やそれに類似した公理体系の上でより精度の高い逆数学的解析を行う研究が体系的に始められた。 $iRCA_0$  はおおそ Bishop の構成的数学に対応する公理体系であるため、 $iRCA_0$  上での逆数学はおおよそ構成的数学に基づく逆数学と考えられる。そのため、 $iRCA_0$  やそれに類似した公理体系の上での逆数学研究は構成的逆数学[I23]と呼ばれている(図 1 参照)。

構成的逆数学は通常の数学や数学基礎論と異なり直観主義論理に基づく推論のみを用いて全ての証明を展開しなければならないため、構成的数学の証明作法に精通している研究者以外には着手することが難しい研究分野である。そのため、構成的逆数学の研究成果は現在でもあまり多くなく、基本的な課題でも未解決なものや未だ取り組まれていないものが多く残されている。特に、本研究の主要課題である「通常の数学とは矛盾する直観主義的原理の構成的逆数学」に関しては、構成的逆数学の創始者である石原哉氏によって一部の萌芽的研究がなされているのみであり[I92, I93, I18]、今後の発展が期待されている。

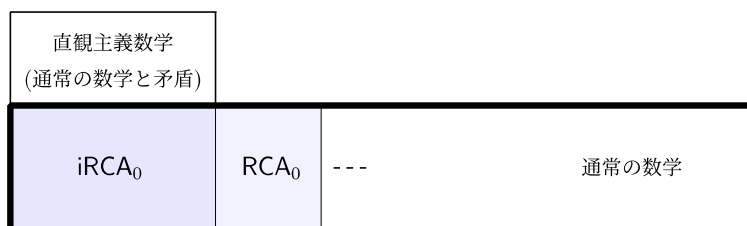


図 1 構成的逆数学の公理体系

2. 研究の目的

直観主義数学において公理として許容されていた原理やそこから導かれる定理を構成的逆数学の文脈で解析し、直観主義数学の論理的構造を明らかにする。また、個々の具体的な公理や定理に対して構成的逆数学を行うだけでなく、直観主義数学や構成的数学の公理体系そのものをメタ数学的に解析し、古典論理に基づく計算可能解析学や古典的逆数学等の数学基礎論の他分野と直観主義数学の直接的な関係を明らかにする。

3. 研究の方法

以下の二つの方向性の研究を並行して推し進めた。

(1) 具体的な直観主義数学における公理や定理に対する逆数学

直観主義数学は通常の数学の論理である古典論理と矛盾するため、古典論理に基づいた体系では直観主義数学の構造の解析はできない。一方、直観主義論理に基づいた二階算術体系  $iRCA_0$

やその高階版  $iRCA_0$  であれば、それは公理系として通常の数学の部分体系であると同時に直観主義数学の部分体系でもあるので、その上で直観主義数学の公理と定理の導出関係を調べることができる(図1参照)。本研究では、直観主義高階算術体系  $iRCA_0$  及びそれに数学的帰納法公理と自然数木上の再帰的定義を加えた体系  $E-IDB$  上で直観主義数学における関数の連続性に関する重要概念を調べた。特に、直観主義数学に端を発し現代数学に通じる一様連続性定理及び直観主義数学における主要概念であるベール空間から自然数集合への関数の連続性概念を逆数学的に解析した。さらに、決定可能ファン定理や唯一解をもつ弱ケーニヒの補題などの直観主義数学に関連する数学的命題についても  $iRCA_0$  上で逆数学的に詳しく解析した。

(2) 構成的逆数学を計算可能解析学や古典的逆数学と関連づけるメタ定理の開発  
直観主義数学の公理や定理の構造を把握するための枠組み研究として、直観主義算術上の論理公理の階層構造と冠頭標準形定理及び保存拡大性定理の関係性を調べた。

本研究においては、(1)及び(2)の両者に関し、興味が近く関連する内容に明るい国内外の研究者と定期的に集中的な議論を交わし、助言や提言をもらいつつ研究を進めた。実際、本研究の内容の多くはそれらの研究者との共同研究となり、それによって優れた研究成果が数多く得られた。

#### 4. 研究成果

(1) 具体的な直観主義数学における公理や定理に対する逆数学

直観主義数学におけるベール空間から自然数集合への関数の連続性の概念について、構成的逆数学の観点から解析した。そして、同概念が「パー再帰を持つモジュラスによって各点連続であること」によって特徴付けられることを示した。より正確には、ベール空間から自然数集合への関数が Brouwer operation によって与えられることが、その関数がパー再帰を持つモジュラスによって(通常の意味で)各点連続であることと  $E-IDB$  上同値であることを示した。この研究成果は河井達治氏との共同研究によるものである [FKa20]。

直観主義数学に端を発する重要な定理である単位区間上の一様連続性定理を詳しく解析し、「モジュラスに連続性を加味した単位区間上の連続関数に対する一様連続性定理」が弱い関数存在公理しか含まない直観主義有限型算術  $iRCA_0$  上で完全二分岐木に対する決定可能ファン定理と同値になることを示した。この研究成果は河井達治氏との共同研究によるものである [FKa21]。一方、モジュラスに関する条件を除いた通常の一様連続性定理(単位区間上の連続関数に対する一様連続性定理)を完全に特徴づけるには未だ至っていない。この問題に関連し、河井氏は [Ka23] において、通常の一様連続性定理が  $iRCA_0$  上で弱ケーニヒの補題 WKL から導出されることを示している。

古典論理に基づく計算可能解析学や古典的逆数学において重要な役を果たすケーニヒの補題 WKL と決定可能ファン定理の  $iRCA_0$  上の導出関係を詳しく分析した [F21]。特に、「完全二分岐木に対する決定可能ファン定理から一般の決定可能ファン定理が導出される」という Bishop の構成的数学においてよく知られた事実は  $iRCA_0$  では導出できない、すなわち、それらの同値性を証明するためには強い関数存在公理が不可欠であることが分かった。

上記(1)の結果を踏まえ、一般の決定可能ファン定理と完全二分岐木に対する決定可能ファン定理の差を埋める公理を構成的逆数学の観点から詳しく解析し、 $iRCA_0$  上で同公理を特徴付ける関数存在公理を特定した。この研究成果は根元多佳子氏との共同研究によるものである [FN24]。

唯一解をもつ弱ケーニヒの補題 WKL!! を構成的逆数学の観点から詳しく解析し、WKL!! が  $iRCA_0$  上で2つの論理公理と2つの関数存在公理の計4つの公理に分解されることを示した。この研究成果は根元多佳子氏との共同研究によるものである [FN23]。

(2) 構成的逆数学を計算可能解析学や古典的逆数学と関連づけるメタ定理の開発

計算可能な集合を構成的数学の立場から検討することにより得られる極めて弱い論理公理の間の導出可能性及び導出不可能性を体系的に調べ、それらがなす階層構造を明らかにした [F22]。さらに、この結果を踏まえ、先行研究によって考察されていた論理公理も併せて論理公理の間の導出可能性及び導出不可能性を体系的に整理し直し、直観主義算術における論理公理全体の階層構造を解明した。これは赤間らによって解明されていた既知の階層構造 [ABHK04] を含意するより精密なものである。この研究成果は倉橋太志氏との共同研究によるものである [FKu22]。

一般に古典論理に基づく理論に対して成り立つが直観主義論理に基づく理論に対しては成り立たないメタ定理である冠頭標準形定理を直観主義一階算術の文脈で詳しく解析し、上記(2)における論理公理の階層構造と冠頭標準形定理の関係性を精密に調べた。特に、[ABHK04] において示されていた半直観主義一階算術における冠頭標準形定理に反例を与え、それを修正した他、修正した半直観主義一階算術における冠頭標準形定理の最適性を示した。この研究成果は倉橋太志氏との共同研究によるものである [FKu21]。

論理公理の階層構造と古典算術の証明能力の保存性の関係を調べ、直観主義一階算術に関する古典一階算術の証明能力の保存性についての主要定理を論理公理の階層構造に基づいて

一般化するメタ定理を得た。さらに、典型的な様々な論理式のクラスに対する一般化された保存性定理を考え、上記(2) の論理公理の階層構造におけるそれらの保存性定理の立ち位置を明らかにした。この研究成果は倉橋太志氏との共同研究によるものである [FKu23]。

以上が本研究によって得られた研究成果の概要である。これらのうち、直観主義数学の解析という意味で最も興味深い成果は上記(1) 及び(1) であるように思われる。本研究ではそれを踏まえて既存の数学と矛盾する直観主義的原理の解析に踏み込むには至らなかったものの、関連する構成的逆数学の結果が数多く得られたという意味では、直観主義数学の公理や定理の構造の理解に向けて一定の成果が得られたといえよう。また、現時点では未だ直観主義数学の構造の解析との直接的な関連は見出せていないものの、倉橋氏との共同研究により、直観主義算術上の論理公理の階層構造と冠頭標準形定理及び保存拡大性定理の関係性の研究が大幅に進展した。これらはそれ自体、直観主義論理に関連する数学基礎論における重要な貢献である。これらに付随する研究として、直観主義的型理論の文脈で論理公理の階層構造を調べる研究が近年ヨーロッパの直観主義的型理論の一部の研究者らによって進められている。

#### 引用文献

- [B27] L. E. J. Brouwer, Über Definitionsbereiche von Funktionen, Math. Annalen 97: pp. 60-75, 1927.
- [B67] E. Bishop, Foundations of Constructive Analysis, McGraw-Hill, 1967.
- [S09] S. G. Simpson, Subsystems of Second Order Arithmetic (2nd edition), Cambridge Univ. Press, 2009.
- [I23] H. Ishihara, An introduction to constructive reverse mathematics, In Douglas Bridges, Hajime Ishihara, Michael Rathjen, and Helmut Schwichtenberg, editors, Handbook of Constructive Mathematics, pp. 636-660. Cambridge University Press, 2023.
- [I91] H. Ishihara, Continuity and nondiscontinuity in constructive mathematics, Journal of Symbolic Logic, vol. 56, pp. 1349-1354, 1991.
- [I92] H. Ishihara, Continuity properties in constructive mathematics, Journal of Symbolic Logic, vol. 57, pp. 557-565, 1992.
- [I18] H. Ishihara, On Brouwer's continuity principle, Indagationes Mathematicae 29(6), pp. 1511-1524, 2018.
- [FKa20] M. Fujiwara and T. Kawai, Characterising Brouwer's continuity by bar recursion on moduli of continuity, Archive for Mathematical Logic, vol. 60, issue 1-2, pp. 241-263, 2020.
- [FKa21] M. Fujiwara and T. Kawai, Decidable fan theorem and uniform continuity theorem with continuous moduli, Mathematical Logic Quarterly, vol. 67, issue 1, pp. 116-130, 2021.
- [Ka23] T. Kawai, Coding of real-valued continuous functions under WKL, Mathematical Logic Quarterly, vol. 69, issue 3, pp. 370-391, 2023.
- [F21] M. Fujiwara, Koenig's lemma, weak Koenig's lemma, and the decidable fan theorem, Mathematical Logic Quarterly, vol. 67, issue 2, pp. 241-257, 2021.
- [FN24] M. Fujiwara and T. Nemoto, Choice principles characterizing the difference between Koenig's lemma and weak Koenig's lemma in constructive reverse mathematics, Computability, to appear.
- [FN23] M. Fujiwara and T. Nemoto, On the decomposition of WKL!, Philosophical Transactions of the Royal Society A, vol. 381, Issue 2248, 15 pages, 2023.
- [F22] M. Fujiwara,  $\Delta_1^0$  variants of the law of excluded middle and related principles, Archive for Mathematical Logic, vol. 61, pp. 1113-1127, 2022.
- [ABHK04] Y. Akama, S. Berardi, S. Hayashi, and U. Kohlenbach, An arithmetical hierarchy of the law of excluded middle and related principles, In Proceedings of the 19th Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science, pp. 192-201, 2004.
- [FKu22] M. Fujiwara and T. Kurahashi, Refining the arithmetical hierarchy of classical principles, Mathematical Logic Quarterly, vol. 68, issue 3, pp. 318-345, 2022.
- [FKu21] M. Fujiwara and T. Kurahashi, Prenex normal form theorems in semi-classical arithmetic, Journal of Symbolic Logic, vol. 86, issue 3, pp. 1124-1153, 2021.
- [FKu23] M. Fujiwara and T. Kurahashi, Conservation theorems on semi-classical arithmetic, Journal of Symbolic Logic, vol. 88, issue 4, pp.1469-1496, 2023.

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計11件（うち査読付論文 11件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Fujiwara Makoto, Kurahashi Taishi	4. 巻 68
2. 論文標題 Refining the arithmetical hierarchy of classical principles	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Mathematical Logic Quarterly	6. 最初と最後の頁 318 ~ 345
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1002/malq.202000077	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Fujiwara Makoto, Nemoto Takako	4. 巻 381
2. 論文標題 On the decomposition of WKL!!	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1098/rsta.2022.0010	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Fujiwara Makoto, Kawai Tatsuji	4. 巻 67
2. 論文標題 Decidable fan theorem and uniform continuity theorem with continuous moduli	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Mathematical Logic Quarterly	6. 最初と最後の頁 116 ~ 130
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1002/malq.202000028	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Makoto Fujiwara	4. 巻 67
2. 論文標題 Koenig's lemma, weak Koenig's lemma, and the decidable fan theorem	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Mathematical Logic Quarterly	6. 最初と最後の頁 241 ~ 257
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1002/malq.202000020	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 FUJIWARA MAKOTO、KURAHASHI TAISHI	4. 巻 86
2. 論文標題 PRENEX NORMAL FORM THEOREMS IN SEMI-CLASSICAL ARITHMETIC	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 The Journal of Symbolic Logic	6. 最初と最後の頁 1124 ~ 1153
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/jsl.2021.47	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Fujiwara Makoto	4. 巻 61
2. 論文標題 Delta <sup>0</sup> <sub>1</sub> variants of the law of excluded middle and related principles	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Archive for Mathematical Logic	6. 最初と最後の頁 1113 ~ 1127
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00153-022-00827-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 FUJIWARA MAKOTO、KURAHASHI TAISHI	4. 巻 88
2. 論文標題 CONSERVATION THEOREMS ON SEMI-CLASSICAL ARITHMETIC	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 The Journal of Symbolic Logic	6. 最初と最後の頁 1469 ~ 1496
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/jsl.2022.25	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Fujiwara Makoto、Kawai Tatsuji	4. 巻 60
2. 論文標題 Characterising Brouwer's continuity by bar recursion on moduli of continuity	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Archive for Mathematical Logic	6. 最初と最後の頁 241 ~ 263
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00153-020-00740-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Fujiwara Makoto, Nemoto Takako	4. 巻 -
2. 論文標題 Choice principles characterizing the difference between Koenig's lemma and weak Koenig's lemma in constructive reverse mathematics	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Computability	6. 最初と最後の頁 1~8
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3233/COM-230478	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

[学会発表] 計13件 (うち招待講演 10件 / うち国際学会 12件)

1. 発表者名 Makoto Fujiwara
2. 発表標題 An extension of the equivalence between Brouwer's fan theorem and weak Koenig's Lemma with a uniqueness hypothesis
3. 学会等名 Computability in Europe 2022: Revolutions and Revelations in Computability (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Makoto Fujiwara
2. 発表標題 Proof interpretations on finite-type arithmetic and uniform provability in reverse mathematics
3. 学会等名 International Conference on Applied Proof Theory 2022 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 藤原誠
2. 発表標題 半直観主義算術の階層と保存拡大定理,
3. 学会等名 日本数学会2023年度年会 数学基礎論および歴史分科会 (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Makoto Fujiwara
2. 発表標題 Conservation theorems on semi-classical arithmetic
3. 学会等名 New Frontiers in Proofs and Computation (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Makoto Fujiwara
2. 発表標題 Conservation theorems on semi-classical arithmetic
3. 学会等名 Dagstuhl Seminar 21472: Geometric Logic, Constructivisation, and Automated Theorem Proving (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Makoto Fujiwara
2. 発表標題 The decidable fan theorem in constructive and classical reverse mathematics
3. 学会等名 Oberwolfach Workshop ID 2046: Mathematical Logic: Proof Theory, Constructive Mathematics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Makoto Fujiwara
2. 発表標題 Decomposition of Koenig's lemma and its unique variants in constructive reverse mathematics
3. 学会等名 Fourth Workshop on Mathematical Logic and its Applications (国際学会)
4. 発表年 2021年



〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------