

令和 6 年 6 月 3 日現在

機関番号：12601

研究種目：若手研究

研究期間：2020～2023

課題番号：20K14357

研究課題名(和文) 流体問題および関連した境界値問題に対する適切性・正則性・数値解法の妥当性の研究

研究課題名(英文) Research on the well-posedness, regularity, and justification of numerical methods for fluid problems and related boundary-value problems

研究代表者

柏原 崇人 (Kashiwabara, Takahito)

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

研究者番号：80771477

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：流体の数値シミュレーションの数学的正当化を目指して、(1)摩擦型境界条件モデルの発展と、(2)滑らかな領域における偏微分方程式の数値解析を研究した。(1)では摩擦型界面条件を提案し、適切性と数値解法の妥当性を示した。さらに、Navier-Stokes方程式の摩擦型境界条件の解の正則性と、速度を含むようなSignorini型接触条件を課した動弾性体方程式の可解性を証明した。(2)では、領域摂動を考慮した有限要素法の誤差評価を高次のアイソパラメトリック要素の場合に拡張し、さらに、放物型方程式に対する時間不連続Galerkin法に対する L_p ノルム評価を改善した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

科学の諸分野に現れる流体现象を分析・予測するための手法として、数値シミュレーションは不可欠な技術となっているが、その急速な発展に対して数学的正当化が十分に追いつけていない側面がある。本研究は、摩擦型境界条件と有限要素法という2つのトピックにおいて、数学解析と数値解析双方の視点に整合する理論を構築することを目指したものである。偏微分方程式問題としての適切性や正則性、および数値解法の妥当性という観点から首尾一貫した数学理論を確立することは、流体の数値シミュレーション技術の基盤構築に貢献する。本研究の成果もその一助となることが期待される。

研究成果の概要(英文)：We studied (1) development of frictional boundary condition models and (2) numerical analysis of PDEs on a smooth domain, aiming to enhance mathematical justification of numerical simulations in fluid dynamics. For topic (1) we proposed friction conditions for interface problems and proved its well-posedness as well as the validity of numerical algorithms. In addition, we obtained regularity for the solution of the Navier-Stokes equations subject to frictional boundary conditions, and we proved unique solvability for linearized elasto-dynamic problems subject to a contact condition of Signorini type that contains velocity. For topic (2) we extended our theoretical analysis of the finite element method, which can handle domain perturbation, to higher-order isoparametric FEMs. Moreover, we improved the L_p estimates for the discontinuous Galerkin time-stepping method applied to parabolic equations.

研究分野：偏微分方程式の数値解析

キーワード：アイソパラメトリック有限要素法要素 摩擦型境界条件 ナビエ・ストークス方程式 プリミティブ方程式 動弾性体方程式 領域摂動誤差 不連続Galerkin法 Signorini接触条件

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

(1) 摩擦型境界条件とは、流体から境界壁面に作用する応力の大きさがある閾値未満ならば流速は0だが、その閾値に達したならば、壁面に沿った滑りあるいは壁面を貫く流入出(漏れ)が起こるような現象を記述する境界条件であり、摩擦という物理現象の直観的な解釈を反映している。摩擦型境界条件は弾性体力学の接触問題において以前から研究されており、変分不等式による数学解析や有限要素法による数値解析の理論が整備されていた。近年、流体力学においてもこの種の境界条件が導入され、数学・数値解析が盛んに行われるようになってきている。ただし、物理・工学等の応用分野ではより現象論的な摩擦モデルが採用されることが多く、上述した数学的摩擦型境界条件モデルとはギャップがあるように見受けられる。このギャップを数学的アプローチによって埋めていくため、摩擦型境界条件を拡張したモデルや関連する非線形力学のモデルを考察し、現象論的アプローチとの比較につなげていくことが有効と考えられる。

(2) PDE の数値解法の中で有限要素法が持つ優位性として、直交格子でなく三角形要素分割を用いるため、曲がった境界を持つ滑らかな領域上の境界値問題に適用しやすいことが挙げられる。しかし、フラットな三角形による分割が曲がった境界に厳密に適合することは当然不可能であり、実際には元の領域を多角形領域で近似するため、理論的な誤差評価では領域近似の誤差(領域摂動誤差)も考慮する必要がある。領域摂動の問題は有限要素法で重要であるにも関わらず、真正面から扱っている結果は多くなく、たとえば界面問題に対する解析や非凸領域上の最大値ノルム誤差解析が行われるようになったのは最近になってからである。滑らかな領域上の有限要素法に対する数学的正当化が確立されるには、さらなる理論の発展が必要である。

2. 研究の目的

科学の諸分野に現れる流体现象を分析・予測するための手法として、数値シミュレーションは不可欠な技術であるが、その急速な発展に対して数学的正当化が十分にされていない側面がある。本研究では、(1) 摩擦型境界条件モデル、(2) 滑らかな領域における偏微分方程式の数値解析という2つの研究テーマにおいて、数学解析と数値解析双方の視点に整合する理論を構築することを目指す。偏微分方程式問題としての適切性や正則性、および数値解法の妥当性という観点から首尾一貫した数学理論を確立して、流体の数値シミュレーション技術に対する数学的正当化の議論を前進させることを目標とする。

3. 研究の方法

(1) 摩擦型境界条件モデルの発展

摩擦型界面条件問題(interface問題)の提案と解析

特に摩擦型漏れ条件の場合、境界面で区切られた領域のうち的一方のみを考察対象とする境界値問題ではなく、境界面を挟む両方の領域でPDEを設定するinterface problemとして考察する方が、より現実の問題と結びつきやすい(たとえば、浸透膜のような境界面を考える際は、その両側にある流体をともに考察するのが自然である)。そこで、摩擦型interface条件を定式化し、可解性証明等の数学解析と有限要素法による数値解析を行う。

摩擦型「境界層」問題の数値モデル化

境界面上だけでなく、「境界付近の薄い領域」にも摩擦効果を付加したモデルを構成できれば、「河底に障害物があって底流を妨げている(ただし流れ自体はゼロでない)」といった流体现象の解析に役立つことが期待される。このような数値モデルの定式化を目指す。

摩擦型境界条件問題の正則性

線形の境界条件を課したNavier-Stokes方程式の解のSobolev H^2 正則性は既知であるが、摩擦型境界条件の場合は未解決問題であった。これは、微分不可能な関係式を含む非線形性のため、移流項を低階摂動として扱えないという技術的な難しさが発生するためである。本研究では、時間方向への差分法という数値解析でなじみのある手法を用いることで、移流項のある意味で「主要部の一部」として扱ったまま、 H^2 正則性を示すアプローチを検討する。

動弾性体の摩擦付き接触問題の解析

法線方向にSignoriniの接触条件、接線方向に摩擦の条件を導入した弾性体の境界値問題は、歴史的には流体問題よりも先行研究の蓄積がある。ところが、定常ではない時間発展す

る弾性体（動弾性体）の運動方程式にそのような境界条件を課す場合、双曲型方程式となることもあり、先行研究は少ない。特に、滑らかな解の存在や一意性は未解決問題となっている。本研究では、本来は変位のみを用いて定式化される接触条件に速度の情報も加えることで、解の存在や一意性が担保される問題設定を提示することを目指す。

(2) 滑らかな領域における偏微分方程式に対する数値解法の数学的正当化

我々は、以前の研究 [Kashiwabara et al., Numer. Math. **134** (2016), 705–740] において、領域摂動誤差を系統的に扱う枠組みを提唱した。それは次の 2 つの方針からなる。

- ・ 領域摂動が原因で数値解法の適合性（有限要素法の場合は Galerkin 直交性）は厳密には成り立たないが、領域摂動に起因する項は正確に等式で表現できる。
- ・ 領域摂動で生じた各項の評価は、いくつかの基本的な誤差評価に帰着できる。

本研究では、上記の方針を以下の問題・手法へ拡張することを試みる。

Stokes-Darcy 連成問題に対する不連続 Galerkin スキームを始めとした、界面問題の数値解法

アイソパラメトリック有限要素法等の高精度手法

非エネルギーノルム、特に $L^p, W^{1,p}$ ノルムによる誤差評価

直交格子を用いる差分法も、仮想領域法や埋込境界法と組み合わせることで、曲がった境界形状を持つ領域上での数値計算が可能になるが、理論的な誤差評価の結果は少ない。そこで、有限要素法で得られた知見は他の数値解法でも有効かどうかを検討する。

4. 研究成果

(1) 摩擦型境界条件モデルの発展

摩擦型漏れ境界条件を界面条件に拡張することに成功した。定常の Stokes 問題に対して、PDE の解の存在と一意性を証明するとともに、射影法 (Uzawa 法)・ペナルティー法・領域分割法に代表される各種アルゴリズムの収束性を理論的に示した。検証例題に対する数値実験では、摩擦の直観を反映した良好な結果が得られた。この結果のさらなる発展として、非定常 Navier-Stokes 方程式や、Stokes-Darcy 練成問題へ適用する研究が進行中である。

研究期間内に摩擦型境界層モデルを直接定式化するまでには至らなかった。しかしながら、塑性流体の運動を記述する Bingham 流体のモデルが、ある意味で「領域内部における摩擦」と対応するのではないかという見解を得ることができた。さらに、摩擦型境界条件や Bingham 流体のような閾値を有する非線形力学の定式化が、最適化や画像解析における L^1 正則化と共通点があることを認識し、両者の関係を見出すことに新たな研究の可能性を見出した。この点は今後の課題として検討を継続したい。

提案した時間離散化にもとづくアプローチが、摩擦型境界条件だけでなく Bingham 問題に対しても有効であることがわかった。後者については、劣微分や単調作用素の手法にもとづき、（完全滑り境界条件の場合に）境界まで込めた H^2 正則性を得た (arXiv 2404.18333)。前者については、特に漏れ境界条件の場合に、半陰的差分スキームを用いて議論を少し変更する必要がある（論文準備中）。

Tresca 摩擦条件を課した動弾性体問題に対して、摩擦係数が時空間に依存する場合でも、強解が存在することを示した (Duvaut-Lions の有名なテキストに載っている従来結果では、摩擦係数は定数と仮定されていた)。さらに、速度を含むような Signorini 型条件を提案し、Tresca 摩擦条件を課した問題についても強解の存在を示した。

(2) 滑らかな領域における偏微分方程式に対する数値解法の数学的正当化

多孔質媒体内の流動をモデル化した Stokes-Darcy 練成問題において滑らかな界面を考え、Beavers-Joseph-Saffman 条件を課した問題を考察した。界面に沿って接方向の流速は一般に不連続となることから、数値解法にもその不連続性を反映する必要がある。我々は、ペナルティー法または Nitsche の方法と区分一次の不連続有限要素を組み合わせた数値計算スキームを開発した。さらに滑らかな界面を近似することで生じる領域摂動誤差も考慮した誤差評価を証明した。

領域内部と境界上で楕円形偏微分方程式を考え、それら 2 つが法線方向微分を通じて相互作用するモデルを一般化 Robin 境界条件という。一般化 Robin 境界条件は、流体構造練成問題の次数低減モデルや、近年注目を集める動的境界条件問題に対するプロトタイプとして登場し、曲がった境界を持つ一般領域における理論数値解析の結果を確立することは重

要な課題となっている。我々は、曲がった境界を近似することで生じる領域摂動も考慮し、有限要素法の誤差評価を導くことに成功した。理論的には1次要素だけでなく2次以上のアイソパラメトリック高次要素もカバーしているが、数値的な実装には課題が残っている。

滑らかな領域における Poisson 方程式の Dirichlet 問題について、2 次以上のアイソパラメトリック有限要素法を用いれば、 L^2 ノルムにおいて最良オーダー収束するという結果を得た（論文準備中）。また、放物型方程式において、時間に関する不連続ガレルキン法を用いると、1 段法として1ステップずつ時間を進めることから計算負荷を抑えられる一方で、高次精度を容易に扱えるというメリットを持つスキームを考えることができる。時空間に関する L^p ノルムによる誤差評価が先行研究で示されているものの、時間刻み幅の対数項を含むため最良オーダーではなかった。我々はその結果を改善し、不連続ガレルキン法による近似次数が1以上であるという仮定のもとで、対数項のない最良オーダー収束を示すことに成功した(arXiv:2306.11365)。

他の数値解法への拡張については、研究期間内は情報収集にとどまった。しかしながら、境界適合メッシュを作成しない数値解法として、(a)PDE は sharp interface モデルで考えるが、離散化の際に近似デルタ関数等を導入して境界補足する方法(レベルセット法・埋込境界法・仮想領域法) (b)PDE の時点で連続的に変化する diffuse interface モデルを導入する方法(フェーズフィールド法)の2つに大別できることを認識した。今後は、(a)の中で埋込境界法と仮想領域法の間関係を明確化することを継続課題としたい。

(3) その他

大気や海洋のように、水平方向のスケールが垂直方向のスケールよりも大きな場合、Navier-Stokes 方程式から静水圧平衡を満たすプリミティブ方程式が導出される。この議論は形式的な次元解析によって行われていたが、我々はその近似の数学的正当化を証明した。周期境界条件かつ等方的な関数空間においては、そのような特異極限の収束証明が知られていたが、我々は滑りなし条件あるいは異方的な関数空間の場合でも同様の結果が成り立つことを示した。

不連続 Galerkin(DG)法は有限要素法の一つで、隣り合う要素間で不連続な基底関数を許容することにより、自由度の高い近似空間を実現する手法である。近似したい PDE の解は要素間でも連続になるものを想定するため、連続性の条件は関数空間でなく弱形式にペナルティ項として反映されるという特徴がある。通常の DG 法のスキームでは各要素がつぶれていないという正則性条件が必要だったが、我々は外接半径条件という緩いメッシュ条件で通用する DG 法のスキームを開発することに成功した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計11件（うち査読付論文 11件 / うち国際共著 3件 / うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Furukawa Ken, Giga Yoshikazu, Hieber Matthias, Hussein Amru, Kashiwabara Takahito, Wrona Marc	4. 巻 33
2. 論文標題 Rigorous justification of the hydrostatic approximation for the primitive equations by scaled Navier-Stokes equations*	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Nonlinearity	6. 最初と最後の頁 6502 ~ 6516
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1088/1361-6544/aba509	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Zhou Guanyu, Jing Feifei, Kashiwabara Takahito	4. 巻 153
2. 論文標題 The numerical methods for the coupled fluid flow under the leak interface condition of the friction-type	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Numerische Mathematik	6. 最初と最後の頁 729 ~ 773
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00211-023-01348-w	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Jing Feifei, Han Weimin, Kashiwabara Takahito, Yan Wenjing	4. 巻 98
2. 論文標題 On Finite Volume Methods for a Navier-Stokes Variational Inequality	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Journal of Scientific Computing	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10915-023-02408-x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Kashiwabara Takahito, Ito Hironichi	4. 巻 380
2. 論文標題 Unique solvability of a crack problem with Signorini-type and Tresca friction conditions in a linearized elastodynamic body	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences	6. 最初と最後の頁 16pp
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1098/rsta.2022.0225	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Furukawa Ken, Kashiwabara Takahito	4. 巻 31
2. 論文標題 Justification of the hydrostatic approximation of the primitive equations in anisotropic space $\$L^{\infty}_H L^q_{x_3}(T^3)\$$	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Adv. Math. Sci. Appl.	6. 最初と最後の頁 45-71
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kashiwabara Takahito, Tsuchiya Takuya	4. 巻 38
2. 論文標題 A robust discontinuous Galerkin scheme on anisotropic meshes	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 1001 ~ 1022
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s13160-021-00474-y	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Furukawa Ken, Giga Yoshikazu, Kashiwabara Takahito	4. 巻 21
2. 論文標題 The hydrostatic approximation for the primitive equations by the scaled Navier-Stokes equations under the no-slip boundary condition	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Evolution Equations	6. 最初と最後の頁 3331 ~ 3373
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00028-021-00674-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hiromichi Itou, Takahito Kashiwabara	4. 巻 28
2. 論文標題 Unique solvability of crack problem with time-dependent friction condition in linearized elastodynamic body	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Mathematical notes of NEFU	6. 最初と最後の頁 121-134
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.25587/SVFU.2021.38.33.008	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Furukawa Ken, Giga Yoshikazu, Hieber Matthias, Hussein Amru, Kashiwabara Takahito, Wrona Marc	4. 巻 33
2. 論文標題 Rigorous justification of the hydrostatic approximation for the primitive equations by scaled Navier-Stokes equations	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Nonlinearity	6. 最初と最後の頁 6502 ~ 6516
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1088/1361-6544/aba509	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Zhou Guanyu, Oikawa Issei, Kashiwabara Takahito	4. 巻 383
2. 論文標題 The Crouzeix-Raviart element for the Stokes equations with the slip boundary condition on a curved boundary	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Computational and Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 113123 ~ 113123
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.cam.2020.113123	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Zhou Guanyu, Kashiwabara Takahito, Oikawa Issei, Chung Eric, Shiue Ming-Cheng	4. 巻 165
2. 論文標題 An analysis on the penalty and Nitsche's methods for the Stokes-Darcy system with a curved interface	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Applied Numerical Mathematics	6. 最初と最後の頁 83 ~ 118
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.apnum.2021.02.006	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計17件（うち招待講演 12件 / うち国際学会 10件）

1. 発表者名 柏原崇人
2. 発表標題 放物型方程式に対する時間半離散不連続 Galerkin 法の誤差評価
3. 学会等名 第 28 回計算工学講演会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Takahito Kashiwabara
2. 発表標題 H^2 -regularity up to boundary for a Bingham fluid
3. 学会等名 ICIAM 2023 (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Takahito Kashiwabara
2. 発表標題 Error estimates of the finite element method in smooth domains
3. 学会等名 MSJ-KMS Joint Meeting 2023 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Takahito Kashiwabara
2. 発表標題 Error estimates of the DG-time stepping method for parabolic equations and the CIP method for advection equations
3. 学会等名 International Workshop on Multiphase flows (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Takahito Kashiwabara
2. 発表標題 H^2 -regularity for the non-stationary Navier--Stokes equations under boundary conditions of friction type
3. 学会等名 Seminar at University of Electronic Science and Technology of China (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 Takahito Kashiwabara
2. 発表標題 Finite element analysis for a generalized Robin boundary value problem in a smooth domain
3. 学会等名 Colloquium Talk (online), The Hong Kong Polytechnic University (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 柏原崇人
2. 発表標題 速度を含むSignorini型接触条件とTresca摩擦条件下での線形動弾性体方程式の一意可解性
3. 学会等名 九州関数方程式セミナー（オンライン）（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Takahito Kashiwabara
2. 発表標題 Finite element analysis for a generalized Robin boundary value problem in a smooth domain
3. 学会等名 SIAM Annual Meeting (online) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Takahito Kashiwabara
2. 発表標題 Finite element analysis for a generalized Robin boundary value problem in a smooth domain
3. 学会等名 WCCM-APCOM 2022 (online) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 柏原崇人
2. 発表標題 放物型方程式に対する時間半離散不連続ガラキン法の $L^\infty_T L^p_x$ ノルム誤差評価
3. 学会等名 RIMS共同研究「数値解析が拓く次世代情報社会~エッジから富岳まで~」（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 柏原崇人
2. 発表標題 非定常な摩擦型・Signorini型境界条件問題の適切性について
3. 学会等名 東大数理講演会（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 T. Kashiwabara
2. 発表標題 Semigroup and maximal regularity approach to the primitive equations
3. 学会等名 The Third Russia-Japan Workshop “Mathematical analysis of fracture phenomena for elastic structures and its applications” (CoMFoS21) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 柏原崇人
2. 発表標題 速度を含むSignorini型接触条件とTresca摩擦条件下での線形動弾性体方程式の一意可解性
3. 学会等名 非線形発展方程式セミナー（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 柏原崇人
2. 発表標題 速度を含むSignorini 型接触条件とTresca摩擦条件下での線形動弾性体方程式の一意可解性
3. 学会等名 北陸応用数理研究会 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 T. Kashiwabara
2. 発表標題 Finite element analysis for a generalized Robin boundary value problem in a smooth domain
3. 学会等名 Colloquium Talk at Department of Applied Mathematics, The Hong Kong Polytechnic University (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Takahito Kashiwabara
2. 発表標題 The semigroup and maximal regularity approach to the primitive equations
3. 学会等名 Oberwolfach MFO-Webinar on Mathematical Advances in Geophysical Flows (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Takahito Kashiwabara
2. 発表標題 Unique solvability of a crack problem with Signorini-type and given-friction conditions in a linearized elastodynamic body
3. 学会等名 2nd Russia-Japan Workshop: Mathematical analysis of fracture phenomena for elastic structures and its applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
ドイツ	Technischen Universität Darmstadt			
中国	電子科技大学	西北工業大学		