

令和 7 年 6 月 17 日現在

機関番号：24304

研究種目：若手研究

研究期間：2020～2024

課題番号：20K14367

研究課題名（和文）Max-plus代数における量子ウォークモデルの構築とその応用

研究課題名（英文）Construction of quantum walk model in Max-plus algebra and its application

研究代表者

渡邊 扇之介（Watanabe, Sennosuke）

福知山公立大学・情報学部・准教授

研究者番号：80735316

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,300,000円

研究成果の概要（和文）：Max-plus代数を用いた量子ウォークの類似モデルを構築し、このモデルにおける保存量と極限分布を明らかにした。また、max-plus代数における対称行列の異なる固有値に属する固有ベクトルの直交性と独立性を示した。さらに、相関付きランダムウォークの漸化式から連続極限と超離散化によって得られる方程式を導出した。連続の方程式は極限の取り方によって波動方程式・拡散方程式・電信方程式を導くことがわかった。また、超離散方程式は交通量を制御する交通流セルオートマトンと解釈できることがわかった。

研究成果の学術的意義や社会的意義

量子ウォーク理論において、多次元化・多状態化という意味での一般化は容易ではなく、その極限分布を求めることは難しい。また、max-plus代数の視点では、もとのモデルと比較ができる類似モデルが作成できることは珍しい。対称行列の固有空間についても、max-plus代数で理論を整備できたことは価値があると考えられる。さらに、相関付きランダムウォークに関連する結果は、可積分系の分野にも興味深い結果を与えていると考えている。特に、超離散化によって得られたセルオートマトンによる交通流モデルは新しいモデルとなっており、渋滞の解析や交通シミュレーションに対する新しいアプローチを与えている。

研究成果の概要（英文）：It is shown that a new model of a walk on one dimensional lattice, as an analogue of the quantum walk, over the max-plus algebra. In this model, we clarified the conserved quantities and limit distributions. We also clarified the orthogonality and independence of eigenvectors belonging to different eigenvalues belonging to different eigenvalues of a symmetric matrix in max-plus algebras. Furthermore, we derived equations obtained by continuum limits and ultra-discretization from the recurrence formula for correlated random walks. It was found that the continuum equations can lead to wave equations, diffusion equations, and telegraph equations depending on how the limits are taken. It was also found that the ultra-discrete equations can be interpreted as traffic flow cellular automata that control traffic volume.

研究分野：応用数学，離散力学系，可積分系

キーワード：量子ウォーク max-plus代数 固有値 セルオートマトン

## 1. 研究開始当初の背景

量子ウォーク理論においては、基盤となる 1 次元 2 状態モデルにおける成果をもととして、多次元化・多状態化を考える一般化の試みがされてきた。固有値解析による安定性や漸近挙動を調べた成果や分布関数に関する成果が報告される中、量子ウォークが生み出す現象に対して革新的な結果が得られているわけではなかった。そこで研究代表者は **max-plus** 代数という代数を用いて量子ウォーク理論に対する新しい視点を与えることで、量子ウォークの現象や数理構造の本質に迫ることを目指した。

**Max-plus** 代数は **max** 演算と足し算によって定義される半環である。起源は 1960 年代の製造工程計画の最適化にあると言われており、近年ではトロピカル幾何学という分野で一般論の整備が進められている。**Max-plus** 代数においては、従来の線形代数で成り立つ事実の様々な類似物が構成されており、線形方程式の解法や固有値問題については多くの結果が得られてきた。また、1990 年代には可積分系の分野で離散方程式に対する超離散化と呼ばれる極限を用いて方程式内の演算を **max** 演算と足し算に変換する手法が開発され、ソリトン方程式が箱玉系と呼ばれる離散力学系で解釈できることがわかった。これを機に、可積分系で知られる方程式が超離散化によってどのような離散力学系になるかの研究が多くなされた。トロピカル幾何学による一般論の形成と、超離散化による具体的なモデルの作成の間で、**max-plus** 代数そのものの理論は整っているとはいえ、いくつかの課題を残している。また、限られた理論の中で解析できるモデルも少なく、近年は応用研究も行き詰まりつつある。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、**max-plus** 代数において量子ウォークに対応するモデルを構築し、そこで展開される理論によって得られる結果がもたらす量子ウォークへの貢献を調べることである。また、必要となる **max-plus** 代数における行列を用いた線形代数の理論を構築し、**max-plus** 代数そのものに対する基盤理論を与えることを目指す。さらには、量子ウォークとの関連が知られているセルオートマトンやグラフ理論に対する応用を検討する。

## 3. 研究の方法

1 次元 2 状態の量子ウォークの時間発展方程式が行列の組合せによって定まることに着目し、方程式を超離散化することで得られる **max-plus** 代数におけるモデルを作成する。得られたモデルにおいて、時間変化に不変な保存量があるかを調べる。量子ウォークにおいては、各時刻における状態ベクトルのノルムの総和が 1 になるという保存量が知られており、つまり各状態のノルムをその状態の存在確率とみなすことができた。これに対応する性質を **max-plus** 代数におけるモデルでも見出すことで、量子ウォークの類似物となるモデルの作成を行う。また、そのモデルの極限分布を調べることで分布関数の導出を行う。さらに、量子ウォークはグラフ理論やセルオートマトンといった他分野との関連もよく調べられているため、それら周辺分野との関連についても **max-plus** 代数の言葉で構築する。

## 4. 研究成果

(1) 1 次元 2 状態の量子ウォークの時間発展方程式を **max-plus** 代数の演算を用いて記述した。粒子が左または右に確率的に移動するランダムウォークモデルの一般化ともいわれる量子ウォークは、初期状態の左または右への移動を行列によって表現し、その組合せによってできる経路によって、任意の時刻・場所の状態ベクトルが決定される。この考え方を引き継ぐモデルを作成し、任意の時刻・場所の状態ベクトルを得るために必要な行列(状態決定行列)の成分を完全に決定した。また、作成したモデルにおいて、各時刻における状態決定行列の固有値の総和が保存量となることを示した。従来の量子ウォークの保存量である「状態ベクトルのノルムの総和」は「状態決定行列のプロベニウスノルムの 2 乗の総和」と言い換えることができ、プロベニウスノルムと特異値との関係から、量子ウォークの **max-plus** 類似が得られたと評価し、このモデルを **max-plus** ウォークと呼ぶこととする。

(2) **Max-plus** ウォークの極限分布を導出した。従来の量子ウォークでは、状態ベクトルの極限分布は原点から離れた場所に局在化し、分布関数はお椀型となる。これに対して、**max-plus** ウォークの分布関数は緩やかな傾きをもつ直線となる。通常の代数における数理モデルを超離散化等によって **max-plus** 代数に書き換えたとき、そのモデルは元のモデルを極端なものにすることが経験的に知られており、**max-plus** ウォークの分布関数はもとのそれを均したと解釈することができる。

(3) 量子ウォークの時間発展を定める行列はユニタリ性が重要な性質となっている。**Max-plus** 代数では、その演算の性質上、ベクトルの直交性や独立性を明確に定めることが難しく、**max-plus** ウォークではユニタリ性を引き継ぐことはできなかった。そこで、**max-plus** 代数の基礎理論の構築として、対称行列の異なる固有値に属する固有ベクトルが独立し、直交することを示した。固有空間における議論とはなるが、対称行列の特徴を明らかにした結果である。

(4) ランダムウォークと量子ウォークの中間に位置するといわれている相関付きランダムウォークに対して、時間発展の漸化式を連続化・超離散化して得られる方程式を導出した。連続の方程式は極限の取り方によって波動方程式・拡散方程式・電信方程式の3つの方程式が得られる。また、可積分系においてよく知られるコール・ホップ変換という変数変換を用いることで、有名なソリトン方程式であるバーガス方程式の拡張を導出することができた。さらに、超離散化によって得られる方程式はセルオートマトンモデルを記述することができる。バーガス方程式は超離散化によって交通流セルオートマトンとなるように、本研究で得られた超離散方程式も交通流モデルとしての解釈ができ、交通量にあわせて道路の容量が変化する交通流モデルとなった。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Nishida Yuki, Watanabe Sennosuke, Watanabe Yoshihide	4. 巻 Online
2. 論文標題 Independence and orthogonality of algebraic eigenvectors over the max-plus algebra	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Linear and Multilinear Algebra	6. 最初と最後の頁 87 ~ 105
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1080/03081087.2024.2316781	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Fukuda Akiko, Segawa Etsuo, Watanabe Sennosuke	4. 巻 29
2. 論文標題 Generalized discrete and ultradiscrete Burgers equations derived through the correlated random walk	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Journal of Difference Equations and Applications	6. 最初と最後の頁 84 ~ 101
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1080/10236198.2023.2172969	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Watanabe Sennosuke, Fukuda Akiko, Segawa Etsuo, Sato Iwao	4. 巻 B87
2. 論文標題 Limit theorem of the max-plus walk	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku Bessatsu	6. 最初と最後の頁 125-133
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Watanabe Sennosuke, Fukuda Akiko, Segawa Etsuo, Sato Iwao	4. 巻 598
2. 論文標題 A walk on max-plus algebra	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Linear Algebra and its Applications	6. 最初と最後の頁 29 ~ 48
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.laa.2020.03.025	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計6件（うち招待講演 2件 / うち国際学会 2件）

1. 発表者名 Sennosuke Watanabe, Akiko Fukuda, Etsuo Segawa
2. 発表標題 Continuous, discrete and ultradiscrete Burgers equation derived through the correlated random walk
3. 学会等名 The 17th SIAM East Asian Section Conference (EASIAM) (国際学会)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 渡邊扇之介
2. 発表標題 Max-plus代数上の量子ウォークモデル
3. 学会等名 大阪組合せ論セミナー（招待講演）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 渡邊扇之介, 福田亜希子, 瀬川悦生
2. 発表標題 Ultradiscrete Burgers Cellular Automata derived through the Correlated Random Walk
3. 学会等名 第1回福知山数理・データサイエンス研究会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Yuki Nishida, Sennosuke Watanabe, Yoshihide Watanabe
2. 発表標題 Analysis of traffic flow models by triangulation of min-plus matrices
3. 学会等名 10th International Congress on Industrial and Applied Mathematics (ICIAM2023) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 渡邊扇之介
2. 発表標題 量子ウォークのmax-plus類似と極限定理
3. 学会等名 スペクトラルグラフ理論および周辺領域 第10回研究集会（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 西田優樹，渡邊扇之介，渡邊芳英
2. 発表標題 Max-plus対称行列の代数的固有ベクトルの直交性
3. 学会等名 日本応用数理学会2021年度年会
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関