

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 6 年 5 月 1 日現在

機関番号：12601

研究種目：挑戦的研究(萌芽)

研究期間：2020～2023

課題番号：20K20877

研究課題名(和文)量子化と双対性が示唆する幾何学の研究

研究課題名(英文)Geometry from the viewpoint of quantization and duality

研究代表者

加藤 晃史(Kato, Akishi)

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

研究者番号：10211848

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 5,000,000円

研究成果の概要(和文)：籠とその変異は、さまざまな分野に現れる共通構造として注目を集めていて、籠の変異列の不変量を数学的に厳密に解析する手段の開発が必要となった。私は寺嶋郁二氏(東北大学)と共同で、籠変異の列に対し、分配級数  $Z(\cdot)$  と呼ばれる母関数を定義した。その特徴は、(1) の反転操作や巡回シフトのもとで不変 (2) の変形に対し量子ダイログと同様なペンタゴン関係式を満たす。 (3) デインキン図形に対し coset 共形場理論の指標に一致し保型性を持つ。 (4) reddening 列に対し、組み合わせ論的 DT 不変量と一致する。現在は分配級数の考え方を発展させ、3次元多様体の量子不変量との関係を研究中である。

研究成果の学術的意義や社会的意義

学問が専門化し細分化が進むと、分野間の共通構造が見えづらくなる。我々が提唱する分配級数は、有向グラフや貼り合わせのような組合せ論的データのみから定義され、具体的対象の設定やモデルの詳細には依らない。ちょうど遺伝子が生物種を比較するときに役立つように、分配級数も、数学や物理学の諸分野にまたがる双対性(共通の性質)を追究する上で役立つことが期待される。

研究成果の概要(英文)：Recently quivers and their mutations play pivotal role in mathematics and mathematical physics. In a recent joint work with Yuji Terashima (Tohoku University), we introduced a partition q-series  $Z(\cdot)$  for a quiver mutation loop.  $Z(\cdot)$ 's enjoy following remarkable properties: (1) Invariance under inversion and cyclic shift of ; may be regarded as a monodromy invariant. (2) Pentagon identities similar to those for quantum dilogarithms. (3) (For Dynkin type quivers) Reproduce fermionic characters of coset CFTs, and thus have nice modularity. (4) (For reddening mutation sequences) Can be expressed as an ordered product of quantum-dilogarithms and coincide with the combinatorial Donaldson-Thomas invariants. I am now working on extending these ideas to obtain quantum invariants of triangulated three manifolds.

研究分野：数理物理学

キーワード：クラスター代数 籠変異 分配級数 量子不変量 ペンタゴン関係式 指標公式 量子ダイログ 保型性

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

## 1. 研究開始当初の背景

ゲージ理論や弦理論の研究から、数学的に見ても深い予想がなぜ物理学からもたらされるのだろうか？物理にあって数学にはない「量子化」や「双対性」にこそ、その秘密が隠されていると考えるのは自然であろう。

## 2. 研究の目的

物理学で何気なく使われている「量子化(quantization)」や「双対性(duality)」という概念が、そもそも数学的には何を意味するのか、「幾何的・大域的」(局所座標系のとりかたに依らない形で)かつ「普遍的・圏論的」(個々の対象の詳細には依らない関手として)に定式化し、その基本的な性質を明らかにすることにある。

## 3. 研究の方法

双対性の背後には、しばしば、籠(quiver)とその変異(mutation)のような組合せ論的データがある。こうしたデータのみから定義されて籠が表す数学的・物理的実体の詳細には依らず、なおかつ「量子化 = 経路積分」的側面を持つ数学的道具が構築できれば、双対性の背後にある共通の性質を追究する上で非常に役立つと期待される。

## 4. 研究成果

籠(quiver)とその変異(mutation)は、クラスター代数とともに、可積分系・低次元トポロジー・表現論・代数幾何学・WKB 解析などさまざまな分野に共通して現れる構造として注目を集めている。特に、籠の変異列 (mutation sequence) とゲージ理論や3次元双曲多様体の関連が提唱され、その不変量を数学的に厳密に解析する手段の開発が必要となった。

私は寺嶋郁二氏(東北大学)との共同研究において、与えられた籠変異の列 (quiver mutation loop = クラスター代数の exchange graph 上のループに相当)に対し、分配 $q$ 級数  $Z(\ )$  と呼ばれる母関数を定義した。これは、以下のような著しい性質を持つ。

- (1)  $Z(\ )$  は籠変異の列 の反転操作や巡回シフトのもとで不変であり、圏論的なモノドロミーの不変量と考えられる。
- (2) 籠変異の列 の変形に対し、量子ダイログと同様なペンタゴン関係式を満たす。
- (3) ADE 型ディンキン図形やそのペアから自然に定義される分配  $q$  級数は、アフィン・リー環に附随する coset 型共形場理論に現れるフェルミ型(準粒子型)指標公式に一致し、適当な  $q$  ベキ補正のもとで  $Z(\ )$  は保型形式となる。
- (4) reddening sequence というクラスの籠変異列 に対し、分配級数は量子ダイログの積で表され、B. Keller によって導入された combinatorial Donaldson-Thomas invariant と一致する。

以上は変異列が loop 状で周期境界条件を架した場合であった。

そうではなく、初期条件のみを指定した有限区間型の変異列に対しても、分配  $q$  級数の考え方は適用可能である。この場合は終状態に対する自由端条件を表すのが自然であり、そのために、 $c$ -vector で次数付けされた非可換トラス値関数として考えるのが自然である。

そこで、寺嶋郁二氏と水野勇磨氏(ともに東京工業大学)との共同研究において、Boltzmann weight を  $q$ -二項係数とする version の分配関数 (partition function) を導入し、その性質を調べた。この分配関数は、実は引数の異なる 2 つの分配  $q$  級数 (組合せ論的 DT 不変量) の比として書けることが証明できる。その結果、分配関数もまた分配  $q$  級数が持つ様々な良い性質を引き継いでいる。

分配  $q$  級数や分配関数は組合せ論的データのみから定義され、籠が表す数学的対象の詳細には依らないので、双対性の背後にある共通の性質を追究する上で役立つと期待される。

現在は分配級数の考え方を発展させ、3次元多様体の量子不変量を、理想単体分割とその張り合わせのデータから直接的に構成する研究を進めている。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計0件

〔学会発表〕 計0件

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------