

令和 6 年 6 月 26 日現在

機関番号：14301

研究種目：挑戦的研究（萌芽）

研究期間：2020～2023

課題番号：20K20882

研究課題名（和文）巨大なランダムテンソルの漸近的挙動の研究

研究課題名（英文）Behavior of Large random tensors and related topics

研究代表者

COLLINS Benoit (Collins, Benoit)

京都大学・理学研究科・教授

研究者番号：20721418

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 4,700,000円

研究成果の概要（和文）：2020年度は、HCIZ積分をテンソルの設定まで拡張する研究で、JEMSに掲載、またニューラルネットワークに自由確率論を応用するための研究で、CMPに掲載された。2021年度は、ランク1の独立な n 次元ベクトルの k 階テンソル積の和の固有値分布について研究し、EJPに掲載された。2022年度は、HCIZ積分のテンソルへの一般化を考え、そのテンソルのサイズ N を大きくとったときの漸近挙動を調べた研究をCMPに掲載、局所ランダムハミルトニアンの特値についての研究をJPhAに掲載した。2023年度は、不変状態に対するテンソル積空間におけるユニタリ行列の漸近的自由性を示した論文をRMTAに掲載した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

ランダムテンソルの研究は、2本の脚を持つランダム行列に比べて非常に限られていたが本研究課題により、その手法を大きく広げたり、新しい現象を発見した。また機械学習に関連する研究も生まれた。量子情報理論や量子重力理論でもランダムテンソルが必要とされる場面があり、機械学習理論の進歩により、データ構造にテンソル構造が含まれるケースが増えています。これにより、ランダムテンソルの研究が進展しています。この研究成果は、今後学術的には新しい数学的ツールの開発を促進し、社会的には量子情報理論や機械学習の進歩に貢献する可能性があります。

研究成果の概要（英文）：In the fiscal year 2020, research on extending the HCIZ integral to the tensor setting was published in JEMS, and research on applying free probability theory to neural networks was published in CMP. In the fiscal year 2021, research on the eigenvalue distribution of the sum of k -th order tensor products of rank-1 independent n -dimensional vectors was published in EJP. In the fiscal year 2022, research on the asymptotic behavior when the size N of the tensor is large, considering the generalization of the HCIZ integral to tensors, was published in CMP, and research on the spectrum of local random Hamiltonians was published in JPhA. In the fiscal year 2023, a paper demonstrating the asymptotic freeness of unitary matrices in tensor product spaces for invariant states was published in RMTA.

研究分野：random tensors

キーワード：random tensors free probability

1. 研究開始当初の背景

研究代表者はランダム行列の研究を行ってきた。本研究では Weingarten 解析, Non-backtracking 理論などのランダム行列の研究で深めた技法をテンソルの設定の場合まで拡張を進め、より高次のテンソルに値を取るランダムテンソルの研究を行うことに思い至った。確率論で言う大数の法則や中心極限定理のようなサイズの大きい場合の不変量や摂動を計算する系統的なアプローチを作り上げ、ランダムグラフ、量子情報理論、機械学習におけるランダムテンソルについての問題解決を目指そうと考えた。

これらのアイデアの背景は特別なランダムテンソルの場合としてのランダム行列が深く進んできていることが挙げられるだろう。それを順を追って説明する。

まず、1920年代の農学的な観点から統計学を研究していた John Wishart による研究を出発点に、1950年代の Wigner による研究など数学の外の目からの研究が主体であった黎明期を経て、1970年代80年代に単一のランダム行列のスペクトルの詳細な研究がいくつか行われた。1990年代の Bai らによるスティルチェス変換による深い研究、他にも数論におけるランダム行列理論とのリンクの発見など面白い研究は多々あったが古典的な研究は単一のランダム行列のものばかりであった。

その状況を変えたのが、自由確率論と呼ばれる作用素環論における自由群因子環の同型問題由来の非可換確率論がランダム行列理論に応用できるという Voiculescu の発見(Limit laws for random matrices and free products. Invent. Math. 104 (1991), no. 1, 201–220)である。

この発見は端的にいうと以下の通りである。ランダム行列はそれを行列空間上の分布として見るのではなく、そのスペクトル分布(経験固有値分布)を考えることにより1次元の(ランダムな)分布を持つような対象と見ることができ(確率論的ではなく、非可換確率論的にランダム行列を眺める)。その時にそのトレースモーメントと呼ばれる行列の k 乗のトレースをとった後の期待値を考えれば上のスペクトル分布の平均である平均スペクトル分布のモーメントを見ることができる。ここで左右からのユニタリ行列の積をとってもその確率分布が不変であるような性質の良いランダム行列(これは GUE と呼ばれる重要なランダム行列を含む十分意味のあるクラス)はその行列サイズ極限で「自由独立」と呼ばれる独立性を満たす、すなわちトレースモーメント計算の法則が与えられる、ということを中心とした。これを漸近的自由性と呼ぶ。この漸近的自由独立性は自由畳み込みと呼ばれる自由独立な確率変数の和の分布を求める演算の研究と合流し、独立なランダム行列の和の分布を見積もることなどを可能にして、無線通信理論などをはじめ多くの科学とランダム行列の交流を新たに産んだ。

この発見以降ランダム行列の研究は複数個のランダム行列を扱ったものが増えてきている。Voiculescu の発見は上記の Bai らによるスティルチェス変換による深い研究は自由調和解析と呼ばれる非可換調和解析に昇華され、自由畳み込みの具体的な計算をする道具を提供した。これはすなわち独立なランダム行列の和や積のスペクトル分布を計算する道具立てを導いたということである。具体的には、R-変換の方法やコーシー変換の従属操作の研究など解析的な理論の整備がされてその深い研究がどんどん進んでいる。他にも Speicher や Nica による組み合わせ論的に深い研究が行われて非交和分割を用いた「自由キウムラント」の理論が完成した。

このような流れの中で研究代表者が中心となってこの分野の一つの理論として Weingarten 解析と呼ばれるユニタリ行列の空間上の一様分布に対する積分の計算理論を作り上げた。Weingarten 解析は上記の左右からのユニタリ行列の積をとってもその確率分布が不変であるような性質の良いランダム行列を扱う上で非常に便利な道具立てで、さまざまな応用が見つかっている。それについては研究代表者による ICM 講演予稿「Moment Methods on compact groups: Weingarten calculus and its applications(arXiv:2207.08418)」とその参考文献を参照してほしい。この技術はランダム行列のサイズ極限での収束を精緻に扱うことを可能にしてくれている。また量子情報理論で扱いたいような大規模なサイズのモデルに対して非常に有効な手立てとなっている。

ここまで述べたようにランダム行列の研究は非常に豊かかつ複雑な構造が扱えるようになってきているという背景があった。

2. 研究の目的

本研究課題のもっとも基本となる設定は、有限次元ヒルベルト空間である。つまり、 C^n に標準

内積を備えた空間である。各次元 n_1, \dots, n_k である有限次元ヒルベルト空間のテンソル積は次元が $n_1 \dots n_k$ のベクトル空間となる。 k はテンソルの脚の数と呼ばれ、基本的なケースは $k = 2$ で、これは行列である。行列は数学における基礎的道具の1つであり、データの配列、線形システムのエンコード、または自己準同型写像のいずれかとも見なされ、その構造は非常によく研究されている。行列は、純粋数学で重要かつ美しい対象として存在するだけでなく、統計学や物理学、そして今では金融、通信、機械学習など他の多くの場所で非常に重要な役割を果たしてきている。それと同様により高次のテンソルもデータ解析技術の進展や物理学と絡んで非常に重要な数学的道具となっている。

一方、行列の要素を確率変数としたのがランダム行列であり、上記に述べたように 1920 年代に農学的な観点から統計学を研究していた John Wishart の研究にランダム行列は端を発し、50 年代、ノーベル物理学賞受賞者である Eugene Wigner は、重い原子核に対する Schrodinger の方程式などの量子力学における方程式の研究の中で、そのハミルトニアンをガウス型ランダム行列に置き換えて考え、この見方より問題をかなり単純化し、計算可能にした。その後、ランダム行列理論は数学や数理物理学をまたぐ一つの独立した分野となり、確率論、作用素環論、組合せ論、数論、応用数学、電気通信、量子情報など多くの観点から研究が行われている。ランダム行列は 2 本の脚しかない場合のテンソルのランダムな対応物と見ることができる。

3 本以上の脚がある場合テンソルのランダムな対応物であるランダムテンソルはほとんど研究されていない。一つの理由は、行列の固有値や固有ベクトルとは異なり、より高いテンソルの場合、行列における固有値のような研究する対象が自然に定義されておらず、研究するのはランダム行列に比べてとても困難であるからだ。しかし上記で述べたデータ解析技術の進展や物理学とともにどうしてもランダムテンソルを扱いたい場面が増えてきており、その研究はじわじわと増えてきている。実際 Gurau による「Random Tensors」(Oxford Univ Pr,2016)というランダムテンソルについての研究の本も出版されるなどしてきている。

自由確率論とランダム行列を研究してきた研究代表者の目からは「1. 研究開始当初の背景」を踏まえると Voiculescu のブレイクスルーによるランダム行列を複数個扱えるようにした状況のようなやり方が今ランダムテンソルにも求められているのでは、と考えた。

具体的にはテンソルの独立なコピーが局所的演算、たとえばユニタリ群のテンソル積 $U(n_1) \otimes \dots \otimes U(n_k)$ のもとでなど、について不変であるというような仮定のもとでは自由確率論におけるようなテンソルの和に対するスペクトルの計算手法が得られるか?という自然な問いがこれまでの研究から浮かんだ。これを調べるのが研究の目的である。

3. 研究の方法

ランダム行列理論において、多くの極めて強力な解析的道具立てが用意されている。複素解析をはじめ Harish-Chandra-Itzykson-Zuber 積分や直交多項式などの多くの代数的あるいは解析的な道具立てがある。しかし、これらの道具立ては高階テンソルではそのままのやり方では用いることが出来ない。唯一いくらかの成功を収めているのは Gurau による組合せ論的手法である。我々は新しいテンソル上の解析を行う新しい解析的道具立てを開発する。本研究課題では以下のような各分野のスペシャリストとの密な協力を基とした研究体制で問題にアタックする。具体的には物理サイドでのランダムテンソル研究者の現在ドイツ・ハイデルベルク大学の Razvan Gurau 氏および現在フランス・リヨン高等師範学校の Luca Lionni 氏らとコンタクトを取り議論を行いその研究成果をまとめ論文として出版することを目指す(そして実行した)。Gurau 氏はガウス型のテンソルの解析を発展させているが、このやり方はユニタリ型の場合、さらには局所不変性を持つもの全体まで拡張できると思われるためユニタリのケースを扱う。今まで知られている展開手法よりもずっとよい局所ユニタリ不変なテンソルに系統的にアプローチする方法を与えるはずと見込んだ。このことを共同研究として進めた。これらを行うために Razvan Gurau 氏および Luca Lionni 氏を招聘したり海外の国際会議などで合流し打ち合わせを行うなどを行う。

また現クラスター株式会社メタバース研究所シニアリサーチサイエンティストの早瀬友裕氏と議論を行うことで機械学習を動機としたランダムテンソルの問題を共同研究する。深層学習で現れるようなモデルに対しての Voiculescu の発見した漸近的自由性が成り立つかの問題は今後の計算技術の向上の大きなヒントになると考えたからである。またそのような問題がランダムテンソルの研究の今後の方向性に大きな影響を与えてくれるからである。

また、本研究課題に関連した研究者を国内外から招聘し、議論を行うことで研究を遂行した。

4. 研究成果

以下で年度ごとの研究成果を述べていく。

2020年度研究代表者はランダムテンソルの分野で以下の研究を行い、プレプリントを作

成した。

1つ目のプレプリントは現在ドイツ・ハイデルベルク大学の Razvan Gurau 氏および現在フランス・リヨン高等師範学校の Luca Lionni 氏とともに作成した「The tensor Harish-Chandra-Itzykson-Zuber integral I: Weingarten calculus and a generalization of monotone Hurwitz numbers, (arXiv:2010.13661.)」である。

この論文では、Harish-Chandra-Itzykson-Zuber 積分をテンソルの設定まで拡張する研究を行なった。そのために、テンソル版 Weingarten 解析の基礎を作り、Weingarten 関数に関する多くの結果をテンソルの状況で再導出し、一般化した。

数学の専門誌「Journal of the European Mathematical Society (JEMS)」へ投稿・掲載された。

他の方向として早瀬友裕氏とともに「Asymptotic Freeness of Layerwise Jacobians Caused by Invariance of Multilayer Perceptron: The Haar Orthogonal Case, (arXiv:2103.13466.)」を作成した。

これはランダムテンソルを介してニューラルネットワークに自由確率論を応用するための論文である。深層学習理論でも自由確率論的な計算の論文が出始めていたが、一方で非常に形式的な計算が主体であった。本研究では深層学習理論で重要な研究対象である multilayer perceptrons における layerwise Jacobian の漸近的な自由独立性を厳密に証明した。これにより深層学習理論でも自由確率論が正しく適用できることが確認された。数理物理専門誌「Communications in Mathematical Physics」へ投稿・掲載された。

2021年度は研究代表者と現ルクセンブルク大学の Wangjun Yuan 氏および現中国・香港中文大学の Jeff Yao 氏とでランク1の独立な n 次元ベクトルの k 階テンソル積の和の固有値分布についての研究を進めた。

従来結果では k の増加を $o(n)$ と仮定したもとはランダム行列における標本共分散行列のスペクトル分布の極限分布として現れる Marcenko-Pastur 分布と呼ばれるよく知られた確率分布への収束を示すような結果であった。今回の研究では、量子情報理論からの動機で、その仮定である k の増加を $0(n)$ とより早い増加で考えた。このケースの場合ではその行列モーメントが Marcenko-Pastur 分布以外の分布のモーメントへ収束することが起こることを発見し、それを示した。また既知の Marcenko-Pastur 分布へ収束するようなケースは k の増加が $o(n)$ であることが必要十分であることも示した。

この研究結果をプレプリント「On spectral distribution of sample covariance matrices from large dimensional and large k -fold tensor products」(arXiv:2112.05995) としてまとめ数学の専門誌「Electronic Journal of Probability」へ投稿・掲載された。

これに引き続き、Wangjun Yuan 氏とはさらに発展的な結果を出すべく共同研究を継続し、このランダムテンソルの研究を測度集中の結果など用い、深めていく方向で議論を継続している。

2022年度は Razvan Gurau 氏、Luca Lionni 氏とともに「The tensor Harish-Chandra-Itzykson-Zuber integral II: detecting entanglement in large quantum systems」をまとめて、投稿、その後それを改訂し、専門誌「Communications in Mathematical Physics」に掲載が確定した。この論文では最近導入された Harish-Chandra-Itzykson-Zuber 積分のテンソルへの一般化を考え、そのテンソルのサイズ N を大きくとったときの漸近挙動を調べた。この研究では、外部テンソルの大きさに対するスケールリングについて仮定している。我々は、漸近スケールリングの2パラメータクラスを解析し、いくつかの非自明な漸近レジームを明らかにした。この研究は、多粒子量子系のエンタングルメント特性の解析に関連する。特にランダム化された局所測定文脈で、この領域への我々の結果の応用の可能性について議論した。

また Zhi Yin 氏、Liang Zhao 氏、Ping Zhong 氏と The spectrum of local random Hamiltonians をまとめてアーカイブに投稿した(arXiv:2210.00855)。この研究から以下のことがわかった。局所ランダムハミルトニアンは、その局所項の確率分布のいわゆる ϵ -free 量み込みによって表すことができる。そのスペクトルを研究するために、 ϵ -non-crossing partitions と permutations の集合の間に同型性を示した。さらに、ハミルトニアンの最大固有値の下界と上界を導出した。これはアーカイブに arXiv:2210.00855 として投稿され、Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical (2023) 56, no. 3: 035201 で出版された。

2023年度は米国のシラキュース大学の Pierre Yves Gaudreau Lamarre 氏、フランス・ボルドー大学の Camille Male 氏と不変状態に対するテンソル積空間におけるユニタリ行列の漸近的な自由性が示した論文「Asymptotic freeness of unitary matrices in tensor product spaces for invariant states」を査読を経て改訂した。その結果、ランダム行列の専門誌「Random Matrices: Theory and Applications」に(2023) 12, no. 02: 2250052 で掲載された。

その他、継続している課題として、Wangjun 氏との共同研究で Bandeira・Boedihardjo・van

Handel 氏らの半円要素とガウス変数の補間の手法を応用され、強漸近的自由性を証明しようとしている。部分的な成果は得られており、その完成を目指している。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計17件（うち査読付論文 13件 / うち国際共著 17件 / うちオープンアクセス 13件）

1. 著者名 Cadilhac, L. and Collins, B.	4. 巻 283
2. 論文標題 A metric characterization of freeness	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Functional Analysis	6. 最初と最後の頁 109562, 14
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jfa.2022.109562	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Collins, Benoit and Matsumoto, Sho and Novak, Jonathan	4. 巻 69
2. 論文標題 The Weingarten calculus	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Notices of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 734--745
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/noti2474	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Collins, Benoit and Guionnet, Alice and Parraud, Felix	4. 巻 10
2. 論文標題 On the operator norm of non-commutative polynomials in deterministic matrices and iid GUE matrices	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Cambridge Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 195--260
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Collins, Benoit and Yao, Jianfeng and Yuan, Wangjun	4. 巻 27
2. 論文標題 On spectral distribution of sample covariance matrices from large dimensional and large k-fold tensor products	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Electronic Journal of Probability	6. 最初と最後の頁 No. 102, 18
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1214/22-ejp825	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Collins, Benoit and Youn, Sang-Gyun	4. 巻 27
2. 論文標題 Additivity violation of the regularized minimum output entropy	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Documenta Mathematica	6. 最初と最後の頁 1299--1320
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4171/dm/898	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Collins, Benoit and Parraud, Felix	4. 巻 63
2. 論文標題 Concentration estimates for random subspaces of a tensor product and application to quantum information theory	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 102202, 13
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1063/5.0073837	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Collins, Benoit and Hayase, Tomohiro	4. 巻 397
2. 論文標題 Asymptotic freeness of layerwise Jacobians caused by invariance of multilayer perceptron: the Haar orthogonal case	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Communications in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 85--109
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00220-022-04441-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Collins, B. and Yin, Z. and Zhao, L. and Zhong, P.	4. 巻 56
2. 論文標題 The spectrum of local random Hamiltonians	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Journal of Physics. A. Mathematical and Theoretical	6. 最初と最後の頁 No. 035201, 28
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1088/1751-8121/acb4c8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Ian Charlesworth, Benoit Collins	4. 巻 116
2. 論文標題 Matrix models for epsilon-free independence	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Arch. Math. (Basel)	6. 最初と最後の頁 585-600
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00013-020-01569-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Collins Benoit, Magee Michael, Puder Doron	4. 巻 1
2. 論文標題 Automorphism-invariant positive definite functions on free groups	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Proceedings of the 27th International Conference in Operator Theory	6. 最初と最後の頁 Amer. Math. Soc
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Brannan Michael, Collins Benoit, Lee Hun Hee, Youn Sang-Gyun	4. 巻 376
2. 論文標題 Temperley-Lieb Quantum Channels	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Communications in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 795-839
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00220-020-03731-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Bardet Ivan, Collins Benoit, Sapro Gunjan	4. 巻 21
2. 論文標題 Characterization of Equivariant Maps and Application to Entanglement Detection	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Annales Henri Poincare	6. 最初と最後の頁 3385-3406
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00023-020-00941-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Collins Benoit、Kumari Sushma、Pestov Vladimir G.	4. 巻 24
2. 論文標題 Universal consistency of the k-NN rule in metric spaces and Nagata dimension	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 ESAIM: Probability and Statistics	6. 最初と最後の頁 914-934
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1051/ps/2020018	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

[学会発表] 計21件 (うち招待講演 21件 / うち国際学会 16件)

1. 発表者名 Benoit Collins
2. 発表標題 New results around the norm of random matrices and operator-valued non-backtracking theory
3. 学会等名 Geneva MP seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Benoit Collins
2. 発表標題 convergence of the spectrum of random matrices in the context of rational fractions
3. 学会等名 UCSD seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Benoit Collins
2. 発表標題 Matrix integrals in a tensor setup
3. 学会等名 Bielefeld - Melbourne Zufallsmatrizen (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Benoit Collins
2. 発表標題 Properties of random tensor matrices with some applications to Quantum Information Theory
3. 学会等名 Functional Analysis Seminar - Institute for Advanced Study in Mathematics of HIT (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Benoit Collins
2. 発表標題 Matrix models for cyclic monotone and monotone independences
3. 学会等名 SIMA 2022 - CIMAT (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Benoit Collins
2. 発表標題 Centered Weingarten calculus and centered Wick calculus
3. 学会等名 Fields Workshop on Noncommutative Geometry, Free Probability Theory and Random Matrix Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Benoit Collins
2. 発表標題 Strong convergence
3. 学会等名 Northwestern Nemmers conference (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Benoit Collins
2. 発表標題 Weingarten calculus for tensors
3. 学会等名 Tensors and applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Benoit Collins
2. 発表標題 Strong convergence for random tensors
3. 学会等名 conference on random tensors (online) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Benoit Collins
2. 発表標題 An overview of Random Matrix Theory and its applications
3. 学会等名 FoPM Seminar Tokyo U (online) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Benoit Collins
2. 発表標題 A metric characterization of freeness
3. 学会等名 QGS: Quantum Groups Seminar (online) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Benoit Collins
2. 発表標題 An introduction to Weingarten calculus
3. 学会等名 the group of theoretical physics in Krakow (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Benoit Collins
2. 発表標題 A metric characterization of freeness
3. 学会等名 Recent Developments in Operator Algebras (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Benoit Collins
2. 発表標題 On the norm convergence of multi matrix random matrix models
3. 学会等名 International Workshop on Operator Theory and its Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Benoit Collins
2. 発表標題 On the operator norm of tensors
3. 学会等名 Structured Random Matrices in Down Under: New Developments and Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Benoit Collins
2. 発表標題 Weingarten calculus for tensors
3. 学会等名 Tensors and applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Benoit Collins
2. 発表標題 On the operator norm of random matrices
3. 学会等名 MSJ Spring Meeting 2021 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Benoit Collins
2. 発表標題 Generalized strong convergence iid random unitaries.
3. 学会等名 Functional Analysis Seminar - UCLA (online) (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Benoit Collins
2. 発表標題 Matrix integrals in a tensor setup
3. 学会等名 OIST Workshop "Quantum Math, Singularities and Applications" (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Benoit Collins
2. 発表標題 Regularized quantities for quantum channels involving free groups
3. 学会等名 CIRM (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Benoit Collins
2. 発表標題 Tensor powers of linear maps and applications to quantum information
3. 学会等名 Recent Developments in Operator Algebras - RIMS (招待講演)
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Collins' website https://www.math.kyoto-u.ac.jp/~collins/

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	佐久間 紀佳 (Sakuma Noriyoshi) (70610187)		

6. 研究組織（つづき）

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	長谷部 高広 (Hasebe Takahiro) (00633166)		
研究協力者	早瀬 友裕 (Hayase Tomohiro)		

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関