

令和 5 年 6 月 2 日現在

機関番号：11301

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2020～2022

課題番号：20K22298

研究課題名（和文）二相Serrin型優決定問題の解析：局所から大域へ

研究課題名（英文）Analysis of a two-phase overdetermined problem of Serrin type: from local to global

研究代表者

Cavallina Lorenzo (Cavallina, Lorenzo)

東北大学・理学研究科・助教

研究者番号：40881264

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,200,000円

研究成果の概要（和文）：一般に、ある領域で与えられた偏微分方程式を満たす関数は無限に存在する。一方、境界上の挙動も指定すれば、解が一意に存在する。本研究では、2つの境界条件を同時に課した偏微分方程式の「優決定問題」で与えられた複合媒質の数理モデルを考える。これは、1971年にSerrinが単一媒質の場合に導入した優決定問題を複合媒質の場合に拡張したものであり、この特徴の一つは、ある特殊な領域に対してのみ解を許すことである。単一媒質の場合では、解を許す領域は球に限る。一方、複合媒質の場合、球対称でない領域でも解を許すものが存在する。本研究では、このような複合媒質の幾何学的性質（滑らかさ、対称性の破れなど）を考察する。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究では、複合媒質の形状最適化に由来する問題を扱う。具体的には、ねじりに対する抵抗を表す「ねじり剛性」を最大化する（すなわち、最大限に頑丈な）長い棒の断面について、本研究で扱う優決定問題は解を許すことが知られている。逆にいえば、優決定問題が解を持たない場合、与えられた形状はねじり剛性を最大化しないこととなる。単一媒質の場合、最適形状の断面が円形であることは知られていたが、複合媒質の場合の最適形状については未解決であった。本研究では、複合媒質中の介在物の形状が複合媒質全体の最適形状を決定することを明らかとし、その結果、回転対称でない最適形状の族を構築することに成功した。

研究成果の概要（英文）：In general, there are infinitely many functions that satisfy a given partial differential equation in a domain. On the other hand, if we also specify the behavior on the boundary, there will be a unique solution. In this study, we consider the mathematical model of a composite-medium given by an "overdetermined problem" for partial differential equations where two boundary conditions are imposed simultaneously. This is an extension to the composite-medium case of the overdetermined problem introduced by Serrin in 1971 for the case of a single medium, and one of its characteristics is that it is solvable only for some special domains. In the homogeneous-medium case, balls are the only domains that allow solutions. On the other hand, in the composite-medium case, there are also non spherically-symmetric domains that allow solutions. In this study, we consider the geometric properties (smoothness, symmetry breaking, etc.) of such composite media.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：複合媒質 形状最適化問題 優決定問題 過剰決定問題 楕円型偏微分方程式 分岐解析 対称性 陰関数定理

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

## 1. 研究開始当初の背景

次の背景があった。

(1) J.Serrinの有名な過度境界値問題(優決定問題)の解の球対称性の定理(J.Serrin, Arch. Rational Mech. Anal., 43 (1971), 304-318)は単一媒質上の楕円型優決定問題を扱っていて、過度境界条件による球の特徴づけを与えた。

具体的には、境界値問題  $-u=1$  in  $\Omega$ ,  $u=0$  on  $\partial\Omega$  の解  $u$  の境界上における法線微分の値が一定であれば、領域  $\Omega$  は球に限るということを示した。

また、単一媒質において、J. Serrinの対称性の定理の定量化版(R. Magnanini, G. Poggesi, Calc. Var. Partial Differential Equations 59 (2020), 35, 23 pp.)も知られている。R. Magnanini-G. Poggesiは、以上の境界値問題において、解  $u$  の法線微分が「ほぼ一定」であれば、領域  $\Omega$  は「球に近い」ということを意味する定量的な評価を示した。

さらに、以上の場合と異なり、介在物を含む母体からなる二相複合媒質においては、Serrin型優決定問題の解は球対称性を有するとは限らないことが知られている(L. Cavallina, T. Yachimura, ESAIM: COCV, 26(2020), 65).

(2) R. Magnanini-G. Poggesiは「解  $u$  の法線微分の値が曲率半径に比例する」という過剰決定条件を伴う優決定問題を考えた。また、単一媒質において、この優決定問題の解は球に限ることを示し、過剰決定条件の摂動に関して定量的な評価を与えた(R. Magnanini, G. Poggesi, J. Anal. Math. 139 (2019), no. 1, 179-205).

(3) Dido 女王の問題は、周長が与えられた半平面内の曲線のうち、最大の面積を囲むものを求める最適化問題である。この問題は変分問題の中で最も古いものの一つと考えられ、Dido によるカルタゴの建設にまつわる伝説に由来している。カルタゴ建設の伝説によると、Dido が牛の皮で囲えるだけの土地を与えられたときに、皮を薄く切って広大な土地を囲んだという。また、Dido 女王の問題の解は半平面の境界に直交する半円である。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、主に以下の二つである。

(1) 介在物を含む母体からなる二相複合媒質において Serrin と Magnanini-Poggesi の優決定問題の拡張を考える。このとき、優決定問題を可解とする介在物と母体の組を「最良組」と呼ぶこととする。最良組の自明な例としては、介在物と母体が同心球の場合が挙げられる。本研究では、優決定問題の非自明解(同心球でない最良組)の解析を行うこととする。具体的には、自明解(同心球)の近傍において、摂動解として得られる非自明解を考察し、以下の3つの課題に着目する。

### 非自明解の対称性・非対称性

非自明解の有する対称性の群に焦点を当てて研究する。特に、どういう条件の下で、最良母体は介在物の対称性の群を共有する(遺伝する)のかを研究する。

### 非自明解全体の集合の構造

陰関数定理及び Crandall-Rabinowitz の分岐定理を用いて、同心球の近傍における非自明解の集合の構造を解明する。特に、問題の様々なパラメータ(伝導率の値、介在物の形状等)に関する依存性を考察し、非自明解の枝における分岐現象を研究する。

### 非自明解の正則性(境界・界面の滑らかさ)

最良組において、界面及び境界の正則性を研究する。特に、介在物の形状が最良母体の正則性に及ぼす影響を明らかにする。

(2) 不連続面を超平面に持つ2相の区分的定数密度関数に関して、Dido 女王の問題の拡張を考える。具体的には、超平面に対して1つ、ユークリッド空間が分割される2つの開半空間に対してそれぞれ1つ、合計3つの異なる重みを持つ重み付き面積汎関数を導入する。また、重み付き体積保存条件下において、重み付き面積汎関数を最小化する開集合の形状を研究する。

## 3. 研究の方法

様々な機会を利用して、国内外の研究協力者との討論・情報交換及び関連する様々な研究集会での情報収集により研究を進めた。しかし、新型コロナウイルスの感染状況の影響により、出張の機会が少なくなり、(特に海外の)研究協力者との交流が困難であった。そのため、代わりに Zoom 等を用いてオンライン研究打ち合わせを定期的に行った。

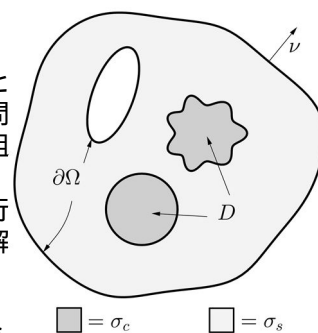


図 1: 二相複合媒質の例

#### 4. 研究成果

主な研究成果は次のようである。ただし、(1)-(3)は二相 Serrin 型優決定問題、(4)は論文 R. Magnanini, G. Poggesi, J. Anal. Math. 139 (2019), no. 1, 179-205 で導入された優決定問題の二相複合媒質へ拡張、そして(5)は Dido 女王の問題の拡張に関する結果である。

(1) 論文 では、「同時非対称摂動法」(英: simultaneous asymmetric perturbation method)を提唱した。この方法を用いて、母体の境界と介在物の境界(界面)が異なる正則性を有する最良組が構成でき、先行研究(L. Cavallina, T. Yachimura, ESAIM: COCV, 26(2020), 65)で示された主定理を改良することに成功した。本論文で構成した最良介在物は Lipschitz 領域であり、最良母体は実解析的な曲面を境界に持つ領域である。また、この結果の系として、最良組において、介在物の凸性は必ずしも最良母体に遺伝されるとは限らないことが明らかとなった。

(2) 先行研究(L. Cavallina, T. Yachimura, ESAIM: COCV, 26(2020), 65)では、伝導率が critical value の場合を除いて、同心球に適切な摂動を加えることで非自明解を構成した。つまり、伝導率が critical value の場合において、同心球近傍の非自明解の集合の構造については未解決な課題が残っていた。論文 では、Crandall-Rabinowitz の定理を用いて、以上の critical value において、分岐現象が起こることを示し、介在物が球である非自明な最良組の族(枝)を構成した。そして、このように得られた非自明母体の対称性の群は有限群であるため、介在物の対称性が完全に遺伝されない最良組の存在が確認された。

(3) 単一媒質における Serrin の優決定問題の解は球に限る。一方、二相複合媒質における解(最良組)は同心球とは限らないことが知られている。論文 では、「一相」に近い二相複合媒質において、最良母体が球に近いことを示した。具体的には、二つの相の伝導率の差が小さい場合(i)または介在物の体積が小さい場合(ii)、最良母体における最小外接球面と最大内接球面の半径の差の定量的な評価を与えた。

(4) Magnanini-Poggesi の提唱した優決定問題を  $N$ 次元ユークリッド空間における二相複合媒質に拡張し、自明解(同心球)近傍において非自明解を考察し、Serrin 型優決定問題との比較を行った。この課題に関して得られた結果は以下のようである。

過剰決定条件に登場する比例定数が  $(N-1)/N$  を超えたら、本優決定問題は解を許さない。

過剰決定条件に登場する比例定数が  $(N-1)/N$  ならば、本優決定問題の解は同心球に限る。

過剰決定条件に登場する比例定数が  $(N-1)/N$  未満の正定数ならば、本優決定問題の非自明解が存在する。また、以上の比例定数が critical value のとき、分岐解もまた存在する。

(5) 論文 では、以上で導入した Dido 女王の問題の拡張を研究した。この問題の最小化形状は、入射角がある種の「スネルの法則」を満たす 2 つの球欠の和集合で表されることが分かった。また、以下の 2 種類の最小化形状が存在する。二つの球欠の底面の半径が一致する場合、最小化形状を type I といい、また二つの球欠の底面の半径が異なる場合、最小化形状を type II という。最後に、問題のパラメータを用いて、最小化形状の種類(type I か type II)に関して完全な分類を与えた。

#### <引用文献>

L. Cavallina, “Local analysis of a two phase free boundary problem concerning mean curvature”, Indiana University Mathematics Journal 71(4) 1411-1435, 2022 年.

L. Cavallina, “The simultaneous asymmetric perturbation method for overdetermined free boundary problems”, Nonlinear Analysis 215 112685-112685 2022 年 2 月.

L. Cavallina, A. Henrot, S. Sakaguchi, “The Double Queen Dido’s Problem”, The Journal of Geometric Analysis 31(8) 7750-7772, 2021 年 8 月.

L. Cavallina, G. Poggesi, T. Yachimura, “Quantitative stability estimates for a two-phase Serrin-type overdetermined problem”, Nonlinear Analysis 222 112919-112919, 2022 年 9 月.

L. Cavallina, T. Yachimura, “Symmetry breaking solutions for a two-phase overdetermined problem of Serrin-type”, Current Trends in Analysis, its Applications and Computation Research Perspectives, Birkhäuser 433-441, 2022 年.

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計7件（うち査読付論文 5件／うち国際共著 2件／うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Cavallina Lorenzo	4. 巻 215
2. 論文標題 The simultaneous asymmetric perturbation method for overdetermined free boundary problems	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Nonlinear Analysis	6. 最初と最後の頁 112685 ~ 112685
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.na.2021.112685	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Cavallina Lorenzo, Henrot Antoine, Sakaguchi Shigeru	4. 巻 -
2. 論文標題 The Double Queen Dido's Problem	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 The Journal of Geometric Analysis	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s12220-020-00549-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Cavallina Lorenzo	4. 巻 71
2. 論文標題 Local analysis of a two phase free boundary problem concerning mean curvature	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Indiana University Mathematics Journal	6. 最初と最後の頁 1411 ~ 1435
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1512/iumj.2022.71.9014	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Cavallina Lorenzo	4. 巻 -
2. 論文標題 On an overdetermined problem for composite materials	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Cavallina Lorenzo, Yachimura Toshiaki	4. 巻 25
2. 論文標題 Spontaneous symmetry breaking for a two-phase overdetermined problem of Serrin-type	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 計算工学講演会論文集 Proceedings of the Conference on Computational Engineering and Science	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Cavallina Lorenzo, Poggesi Giorgio, Yachimura Toshiaki	4. 巻 222
2. 論文標題 Quantitative stability estimates for a two-phase Serrin-type overdetermined problem	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Nonlinear Analysis	6. 最初と最後の頁 112919 ~ 112919
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jna.2022.112919	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Cavallina Lorenzo, Yachimura Toshiaki	4. 巻 -
2. 論文標題 Symmetry Breaking Solutions for a Two-Phase Overdetermined Problem of Serrin-Type	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Current Trends in Analysis, its Applications and Computation. Trends in Mathematics. Birkhauser	6. 最初と最後の頁 433 ~ 441
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-030-87502-2_44	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計12件 (うち招待講演 10件 / うち国際学会 3件)

1. 発表者名 Cavallina Lorenzo
2. 発表標題 A two-phase free boundary problem concerning mean curvature
3. 学会等名 若手研究集会「波動・振動・流れの制御と逆問題-理論と数値計算-」(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Cavallina Lorenzo
2. 発表標題 優決定問題におけるパラメータ付けされた解の族の構成
3. 学会等名 広島微分方程式研究会 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Cavallina Lorenzo
2. 発表標題 複合媒質における過剰決定問題の解の族について
3. 学会等名 Saga Workshop on Partial Differential Equations (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Cavallina Lorenzo
2. 発表標題 Local behavior near the trivial solutions of some two-phase elliptic overdetermined problems
3. 学会等名 UWA Zoom Analysis Seminar, 西オーストラリア大学(Zoom) (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Cavallina Lorenzo
2. 発表標題 On two different two-phase overdetermined problems
3. 学会等名 福岡大学解析セミナー, 福岡大学(Zoom) (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Cavallina Lorenzo, Yachimura Toshiaki
2. 発表標題 Bifurcation analysis for a two-phase overdetermined problem of Serrin type
3. 学会等名 日本応用数理学会2020 年年会D[研究部会OS] 数理設計(Zoom)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Cavallina Lorenzo
2. 発表標題 優決定問題における同時非対称摂動法
3. 学会等名 応用数理解析セミナー, 東北大学
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Cavallina Lorenzo
2. 発表標題 On an overdetermined problem for composite materials
3. 学会等名 RIMS Workshop on Recent developments on inverse problems for partial differential equations and their applications, 京都大学 (Zoom) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Cavallina Lorenzo
2. 発表標題 On an overdetermined problem in a composite medium
3. 学会等名 研究集会「7th camp Homogenization and its related topics」(東北大学) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Cavallina Lorenzo
2. 発表標題 On an overdetermined problem of Serrin-type in a two-phase composite medium with imperfect interfaces
3. 学会等名 京都大学応用数学セミナー KUAMS (AIMR数学連携グループセミナーと合同で開催) (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Cavallina Lorenzo
2. 発表標題 不完全界面を有する二相複合媒質における優決定問題について
3. 学会等名 研究集会「微分方程式の総合的研究」(京都大学, オンライン開催) (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Cavallina Lorenzo
2. 発表標題 形状汎関数の非退化な臨界点における対称性と非対称性について
3. 学会等名 応用解析研究会 (早稲田大学) (招待講演)
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件



8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------