様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　４ 年　 ６ 月　 ４ 日現在

機関番号：１２１０２
研究種目：研究活動スタート支援
研究期間：2020～2021
課題番号：２０Ｋ２２３００

研究課題名（和文）重調和方程式に対する超収束HDG法の研究

研究課題名（英文）Superconvergent HDG methods for the biharmonic equation

研究代表者
及川　一誠（Oikawa, Issei）

筑波大学・数理物質系・准教授

研究者番号：１０６３７４６６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,200,000円

研究成果の概要（和文）：重調和方程式に対して，Hybridizable Discontinuous Galerkin (HDG) 法の超収束性に関する研究を行った．厳密解の勾配に関するハイブリッド変数を導入するというアイデアに基づいて，新しいタイプのHDGスキームを導出した．提案スキームに関して数値実験を実施し，その結果，4つある変数のうち1つだけを除いて最善の収束オーダーを達成できていることが確認できた．

研究成果の学術的意義や社会的意義
本研究では重調和方程式のHybridizable Discontinuous Galerkin (HDG) 法の超収束性の研究を数学的な立場から行い，一定の成果を得た．HDG法の研究において超収束性は主要なテーマであるため，学術的な意義があると考える．さらに，本研究の結果は将来的により優れた偏微分方程式の数値計算手法の開発へとつながることが期待できる．

研究成果の概要（英文）：We studied the superconvergence of the hybridizable discontinuous Galerkin method (HDG) for the biharmonic equation. Using the idea of introducing a hybrid variable for the gradient of the exact solution, we obtained a new HDG formulation. Numerical experiments of the method were carried out, and we observed that the orders of convergence in three of the four variables were optimal.

研究分野：数値解析

キーワード：数値解析

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

Hybridizable Discontinuous Galerkin (HDG) 法とは，不連続 Gakerkin 法において用いられる数値流束を未知関数とみなした手法である．この未知関数は HDG 法ではハイブリッド変数と呼ばれる．ハイブリッド変数を導入することにより，static condensation という係数行列を縮合する操作を行うことが可能になり，その結果，不連続 Galekrin 法よりも計算コストが大幅に抑えられる．これが HDG 法の直接的なメリットである．これとは別の利点として，標準的な三角形及び四面体要素で HDG 法は超収束するということも知られている．最近では超収束性に関する研究が進み，Poisson 方程式に対して，HDG 法が超収束するための十分条件として M-decomposition 理論が提案され，単体要素以外にも超収束する近似空間の組み合わせが新たに発見されている．さらに，M-decomposition 理論は Stokes 方程式や Navier-Stokes 方程式などの 2 階の偏微分方程式に対しても十分条件になることが示されている．一方で，重調和方程式などの高階の偏微分方程式に対しては，未だに超収束する HDG 法が得られていないのが現状である．

２．研究の目的

Neumann 境界条件を含む重調和方程式をモデル問題として，超収束する HDG 法を導出と，超収束性の数学的な解明を本研究の第一の目標とした．Poisson 方程式の場合と同様に，M-decomposition 理論のような十分条件を考案し，新たな HDG 法の開発も目指した．

３．研究の方法

重調和方程式を２つの Poisson 方程式の連立系に書き直し，ハイブリッド変数を導入するのが HDG 法におけるスタンダードな定式化である．これでは超収束しないことが既にわかっていたので，これに何らかの形で修正を加える方法と，重調和方程式を連立系に書き直す段階まで立ち戻って定式化を根本的に見直す方法，の 2 種類のアプローチで研究を行った．

４．研究成果

(1) 重調和方程式に対するスタンダードな HDG 法に対して，M-decomposition 理論を適用した際に，なぜ超収束性が証明できないのかを理論的に確認した．近似空間が M-decomposition 条件を満たすと仮定した場合，Poisson 方程式の場合と同様にある程度までは期待通りに議論が進む．しかし，重調和方程式の場合，つまり Poisson 方程式が連立する場合は，ある試験関数が要素間境界上でゼロにならないため，要素間境界に関する積分項が消えずに残る．この項が存在する限り，超収束性は示せないので，定式化を本質的に見直す必要があることが判明した．

(2) 従来の HDG 法ではスカラー変数に関するハイブリッド変数のみを用いていたが，勾配に関する補助変数に関してもハイブリッド変数を導入するというアイデアに基づいて，新しいタイプの HDG スキームを導出した．提案スキームは従来手法に比べて未知関数の種類が増えてしまうというデメリットがあるが，超収束性が実現できれば，デメリットに見合うだけの価値があると考えた．提案スキームに関して数値実験を実施し，その結果，4 つある変数のうち１つだけを除いて最善の収束オーダーを達成できていることが観測できた．従来手法よりも収束オーダーが改善されたという点では一定

の進展が得られたが，いぜんとして超収束スキームにはなっていないことも判明した．重調和方程式を連立系に書き直したときに現れるインターフェース条件の考慮した手法の研究も行ったが，今後の研究課題として残った．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計1件（うち査読付論文　1件／うち国際共著　1件／うちオープンアクセス　0件）

１．著者名 Guanyu Zhou, Kashiwabara Takahito, Oikawa Issei, Eric Chung, Ming-Cheng Shiue	４．巻 165
２．論文標題 An analysis on the penalty and Nitsche's methods for the Stokes--Darcy system with a curved interface	５．発行年 2021年
３．雑誌名 Applied Numerical Mathematics	６．最初と最後の頁 83-118
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/J.APNUM.2021.02.006	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕　計0件

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関