

令和 5 年 6 月 19 日現在

機関番号：13601

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2020～2022

課題番号：20K22303

研究課題名（和文）高次元における空間異方性を持つBurgers型方程式の漸近解析

研究課題名（英文）Asymptotic analysis of Burgers-type equations with spatial anisotropy in higher dimensions

研究代表者

福田 一貴（Fukuda, Ikki）

信州大学・学術研究院工学系・講師

研究者番号：60882214

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 1,800,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では、主に二次元における一般化KP-Burgers方程式と一般化Zakharov-Kuznetsov-Burgers方程式の、解の長時間挙動と減衰評価について解析を行った。特に、二次元では方程式の持つ空間異方性が導く分散と散逸の相互作用が解の構造に本質的な影響を与え、解の減衰評価では特有の減衰率が現れることを明らかにした。また、解の近似公式を導き、それを用いて、得られた減衰評価の最良性も証明した。これに加えて、研究の前半では、それらの解析の準備として、一次元の分散項付きBurgers方程式についても解析を行い、分散項の形状が解の挙動に与える影響を明らかにした。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究では、分散項付きのBurgers型方程式を扱ったが、それらはいずれも非線形波を記述する方程式であり、その理論の整備は数学としても現象の解析としても重要である。今回、一般化KP-Burgers方程式と一般化Zakharov-Kuznetsov-Burgers方程式、即ち空間異方性のあるBurgers型方程式の研究では、分散型方程式と放物型方程式の両者の手法を組み合わせることで、既存の評価と全く異なるものが得られることを見出した。これは、散逸・分散型方程式に対する解の長時間挙動の理論の深化に繋がったと考えられ、今後のこの分野のさらなる発展への貢献が期待できる。

研究成果の概要（英文）：In this study, we mainly considered the large time behavior and decay estimates for solutions to the generalized KP-Burgers equation and the generalized Zakharov-Kuznetsov-Burgers equation, in two dimensions. In particular, in two dimensions, the interaction between dispersion term and dissipation term induced by the spatial anisotropy of the equation has an essential effect on the structure of the solution. As a result, we showed that a unique decay rate appears in the decay estimates of the solution. Moreover, we derived an approximation formula for the solution and used it to prove the optimality for the decay estimates. In addition, as a preparation for these analyses, we also analyzed some one-dimensional Burgers equations with dispersion term and clarified the effect of the shape of the dispersion term on the large time behavior of the solution.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：Burgers型方程式 一般化KP方程式 一般化ZKB方程式 散逸・分散型方程式 解の漸近挙動 時間減衰評価の最良性 空間異方性

1. 研究開始当初の背景

偏微分方程式は現象を数学の言葉で記述するための道具の一つであり、数学的な研究対象としてだけでなく、物理や工学でも様々な場面で数理モデルとして登場し、その研究内容も多岐に渡る。その中でも、非線形波動理論においては、理論としても応用としても重要な偏微分方程式が数多く登場する。本研究で扱う Burgers 方程式もその一つであり、基本的な非線形波の方程式として知られている。Burgers 方程式は非線形の偏微分方程式であるが、Cole-Hopf 変換と呼ばれる変換によって線形の熱方程式に帰着できるため、解の詳しい形状や長時間挙動について既に多くのことが知られている。Burgers 方程式に分散項を付与した、散逸・分散型方程式の一つである KdV-Burgers 方程式などでも同様にこの手法は適用できて、既に多くの研究成果が得られている。研究代表者は学生時代より、こうした分散項付き Burgers 型方程式の研究に取り組んできた。このような非線形波の偏微分方程式の解の長時間挙動を調べることは、複雑な波動現象であっても、実際に波を起こさずにその形を追うことができるという点から、理論としても応用としても重要であると考えられる。一方近年では、空間高次元における散逸・分散モデルとして、KdV-Burgers 方程式の一般化版の方程式なども知られてきており、その中でも散逸・分散などの各種物理効果が空間異方的に働くようなものも存在し、そうした方程式の解析にも関心が高まってきていた。しかし、こうした問題については空間一次元で用いられている Cole-Hopf 変換が適用できない上に、空間異方性による解析の困難さも相まって、単純な解の評価などですら得るのが難しく、解の長時間挙動に関する先行結果はほとんど知られていない状況であった。

2. 研究の目的

前述の背景を踏まえて、本研究では、高次元において空間異方性を持つ、分散項付きの Burgers 型方程式の初期値問題に関する研究に取り組む。具体的には、一般化 Zakharov-Kuznetsov-Burgers 方程式や、一般化 KP-Burgers 方程式、またはそれに関連する非線形波の偏微分方程式の初期値問題の時間大域解の長時間挙動について考える。特に、方程式の持つ空間異方性に着目し、その異方性が導く分散・散逸・非線形性の相互作用が解の挙動にどのような影響を与えるのかということが、本研究の本質的な問いとなる。本研究の具体的な目的は、これらの問題の解の長時間挙動について、解の減衰評価や漸近形の導出、およびその減衰率や漸近形への漸近率の最適性を考察することで、十分時間が経過した際の、解の構造を理論的に明らかにすることである。これらの研究を通して、非線形波動理論に対して、既存の理論の枠組みだけでは解決できない新たな手法を確立し、この分野のさらなる研究発展のための基盤作りを目指す。

3. 研究の方法

本研究では、高次元の Burgers 方程式を扱うことになるため、一次元の Burgers 型方程式で用いられている解析手法である、Cole-Hopf 変換などは一切適用できないのが難点となる。さらに本研究で扱う問題は、方程式における分散項や散逸項の形状に空間異方性があるものが主たる対象となるため、その異方性から来る難点も乗り越える必要がある。そこで本研究では、分散項と散逸項の形状に着目し、分散型方程式 + 放物型方程式と考えることで、両者の手法を融合した解析を行う。例えば、解の振動の構造を調べる際は分散型方程式の手法が、減衰の構造を調べるには放物型方程式の手法が有効になると考えられるため、それらを上手く組み合わせる研究を行う。そうした解析手法が上手くまわるような問題設定や、解をどの関数空間で考えるかなどについても考える必要があり、こうした研究方法の確立自体が研究の主要部になる。

4. 研究成果

(1) 非整数階分散項を伴う Burgers 方程式の解の高次漸近形に関する研究

研究のはじめに、高次元の問題に取り組むための前段階として、一次元の問題に対する過去の結果の拡張に取り組んだ。研究代表者はこれまで、一般化 KdV-Burgers 方程式などをはじめとする、分散項付きの Burgers 方程式の初期値問題に対する解の高次漸近形の研究を行ってきた。それらの研究から、散逸と分散が共存するような方程式では、解の主要部を決定する際には散逸効果が優勢となるものの、分散効果も解の漸近挙動に本質的な影響を与え、特にその項の減衰率が解の高次漸近形を決定する状況が数多くあることが明らかになってきていた。一方、高次元の問題では、次元の影響に伴う解の評価の変化により、漸近形も大きく異なると予想される。そのことを踏まえて、本研究ではまず、分散項の減衰率の変化に伴う漸近挙動の変化を調査すべく、一次元の問題における分散項を非整数階に拡張した問題に取り組み、空間遠方で十分早く減衰する初期値を与えた場合、分散項の指数を連続的に変化させたときに、解の漸近挙動がどのように変化するかを調べた。実際、解の漸近形を第三次まで導出することに成功し、非整数階分散項のその微分階数に応じて、漸近形への漸近率と解の第二次・第三次の漸近形が本質的に変化することを明らかにした(板坂健太氏との共同研究)。

(2) 一般化 BBM-Burgers 方程式の解の高次漸近形に関する研究

次に高次元の Burgers 型方程式として、一般化 BBM-Burgers 方程式の初期値問題に対する解の漸近挙動の解析を行った。この方程式は散逸と分散を伴う Burgers 型方程式の一種であり、KdV-Burgers 方程式やその高次元版である Zakharov-Kuznetsov-Burgers 方程式の仲間であると見做せる。この問題については、散逸項の形は空間当局的であるが、分散項と移流項の形に空間異方性を許すような場合、初期値が空間遠方である程度早く減衰するという仮定の下、既に一次元と二次元の場合の解の漸近挙動が研究されており、解の漸近形が第二次まで導出されていた。本研究では三次元の場合の解の漸近形を第二次まで導出することに成功し、一次元や二次元の場合とは本質的に異なる漸近形が得られ、分散性の影響が第二次漸近形から現れることなどを明らかにした。

また、本来の研究課題とは少し外れた問題ではあるが、関連する研究として、空間一次元の BBM-Burgers 方程式の解の漸近挙動の解析にも取り組んだ。これについては前述の通り、初期値が空間遠方で早く減衰する場合の解の漸近形が得られていたが、本研究では初期値が空間遠方で緩やかに減衰する場合も含む状況で解析を行い、KdV-Burgers 方程式に対して用いられた漸近解析の手法を応用することで、解の漸近形を第二次まで導出することに成功し、初期値の減衰率に応じて解の第二次漸近形が変化することを明らかにした(池田正弘氏との共同研究)。

(3) 一般化 KP-Burgers 方程式の解の長時間挙動に関連する研究

研究期間の中盤からは、当初の課題である、高次元において空間異方性を持つ Burgers 方程式の問題に取り組んだ。はじめに、二次元の一般化 KP-Burgers 方程式の初期値問題を取り扱った。この方程式は、分散項の形状が x 方向と y 方向で異なり、さらに散逸項が x 方向のみに働くという形をしているのが特徴である。この異方性による散逸と分散の相互作用は解の構造に本質的な影響を与えることが知られており、特に解の時間減衰評価については、この異方性により特有の減衰率が現れる。実際、Molinet(1999)の論文で、初期値に空間異方的な正則性と遠方での減衰の条件を課すことで、解の上からの評価が得られており、解の L^∞ -ノルムが $t^{-7/4}$ のオーダーで減衰することが知られていた。一方、その減衰率が最良かどうかについては未解決となっていたが、本研究ではその問いに一つの答えを与えることに成功した。今回はまずこの問題の線形化問題について再考することからスタートし、方程式が x 方向には放物型となることと、 x 変数について方程式をフーリエ変換すると y 方向にはシュレディンガー方程式とみなせることに着目して、線形化作用素の構造を詳細に解析した。また、 x 方向に関して放物型方程式のアイデアを適用することで、線形解の漸近公式を導出した。これらの解析結果に基づき、線形化作用素の構造に着目して積分方程式の Duhamel 項の積分を細かく分割し、解の主要部を抜き出すことで、初期値の正則性について先行研究と同様の条件下で、解の下からの評価を導出することに成功した。その結果、ある特定の条件下では先行研究で得られた解の評価の減衰率が最良であることを証明した(平山浩之氏との共同研究)。

(4) 一般化 Zakharov-Kuznetsov-Burgers 方程式の解の長時間挙動に関連する研究

最後に、空間二次元における一般化 Zakharov-Kuznetsov-Burgers 方程式の初期値問題の解析を行った。この方程式は、前述の一般化 KP-Burgers 方程式と類似の構造を持っており、散逸項が x 方向のみにしか働かないのが最大の特徴である。しかし、一般化 KP-Burgers 方程式のときと同様の方向で解析しようとする、 y 方向の分散項の形状の違いに起因して線形解の減衰率が悪くなり、それに伴って非線形問題も扱いが難しくなるため類似の結果は簡単には期待できず、解の長時間挙動に関する結果は一切得られていなかった。本研究では、方程式の持つ空間異方性に注意して、解の評価の仕方などを工夫することで、解の長時間挙動に関して新しい知見を得ることに成功した。まずはじめに、異方的 Sobolev 空間を導入し、時間大域的適切性に関する考察を行った。次に、一般化 KP-Burgers 方程式で用いられた手法を応用して、線形解の減衰評価と漸近公式を導出した。さらに、この線形解の評価を利用して、方程式の空間異方性に注意しつつ Fourier Splitting 法なども用いることで、非線形項 $u^p u_x$ の冪 p が 3 以上の場合について、非線形解の上からの評価を導くことに成功した。実際、初期値にある空間異方的な正則性の条件を仮定すると、解の L^2 -ノルムが $t^{-1/4}$ のオーダーで減衰し、解の L^∞ -ノルムが $t^{-3/4}$ のオーダーで減衰することを証明した。加えて、一般化 KP-Burgers 方程式のときの研究から着想を得て、解の下からの評価の導出にも成功した。実際、初期値の積分量が 0 でないという条件の下で、上からの評価で得られた L^∞ -ノルムの減衰率 $t^{-3/4}$ が最良となることを示した(平山浩之氏との共同研究)。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Ikki Fukuda, Hiroyuki Hirayama	4. 巻 234
2. 論文標題 Large time behavior and optimal decay estimate for solutions to the generalized Kadomtsev-Petviashvili-Burgers equation in 2D	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Nonlinear Analysis	6. 最初と最後の頁 113322
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.na.2023.11	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ikki Fukuda, Masahiro Ikeda	4. 巻 336
2. 論文標題 Large time behavior of solutions to the Cauchy problem for the BBM-Burgers equation	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Differential Equations	6. 最初と最後の頁 275-314
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jde.2022.07.020	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ikki Fukuda, Kenta Itasaka	4. 巻 204
2. 論文標題 Higher-order asymptotic profiles of the solutions to the viscous Fornberg-Whitham equation	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Nonlinear Analysis	6. 最初と最後の頁 112200
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.na.2020.112200	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 板坂健太, 福田一貴	4. 巻 180
2. 論文標題 粘性Fornberg-Whitham方程式の解の高次漸近形	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 北海道大学数学講究録	6. 最初と最後の頁 387-396
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.14943/97198	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計15件（うち招待講演 11件 / うち国際学会 2件）

1. 発表者名 福田一貴, 平山浩之
2. 発表標題 一般化KP-Burgers方程式の初期値問題の解の長時間挙動と最適な減衰評価について
3. 学会等名 日本数学会2023年度年会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 福田一貴
2. 発表標題 Large time behavior and optimal decay estimate for solutions to the generalized KP-Burgers equation in 2D
3. 学会等名 九州関数方程式セミナー（オンライン開催）（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 福田一貴
2. 発表標題 Large time behavior and optimal decay estimate for solutions to the generalized KP-Burgers equation in 2D
3. 学会等名 大阪大学微分方程式セミナー（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 福田一貴
2. 発表標題 Large time behavior and optimal decay estimate for solutions to the generalized KP-Burgers equation in 2D
3. 学会等名 第781回応用解析研究会（早稲田大学）（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 福田一貴
2. 発表標題 On the optimal decay estimate for solutions to the generalized KP-Burgers equation in 2D
3. 学会等名 北海道大学偏微分方程式セミナー（オンライン開催）（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 福田一貴, 池田正弘
2. 発表標題 BBM-Burgers方程式の初期値問題の解の漸近挙動
3. 学会等名 日本数学会2022年度秋季総合分科会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 福田一貴
2. 発表標題 粘性Fornberg-Whitham方程式の解の高次漸近形
3. 学会等名 日本数学会2022年度年会（アブストラクト提出）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 福田一貴
2. 発表標題 Higher-order asymptotic profiles of the solutions to the Burgers equation with a fractional dispersion term
3. 学会等名 第13回名古屋微分方程式研究集会（オンライン開催）（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 福田一貴
2. 発表標題 非整数階分散項を伴うBurgers方程式の解の漸近挙動
3. 学会等名 南大阪応用数学セミナー（オンライン開催）（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 福田一貴
2. 発表標題 高次元におけるBBM - Burgers方程式の解の漸近挙動
3. 学会等名 半田山偏微分方程式研究集会（オンライン開催）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 福田一貴
2. 発表標題 非整数階分散項を伴うBurgers方程式の解の漸近挙動
3. 学会等名 大同大学第2回若手微分方程式セミナー（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Ikki Fukuda
2. 発表標題 Effect of a fractional dispersion term on the asymptotic behavior of the solutions to the Burgers type equations
3. 学会等名 The 22th Northeastern Symposium on Mathematical Analysis (Online)（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 福田一貴
2. 発表標題 粘性Fornberg-Whitham方程式の解の高次漸近形
3. 学会等名 京都大学NLPDEセミナー（オンライン開催）（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 福田一貴
2. 発表標題 Higher-order asymptotic profiles of the solutions to the viscous Fornberg-Whitham equation
3. 学会等名 第168回神楽坂解析セミナー（オンライン開催）（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Ikki Fukuda
2. 発表標題 Asymptotic behavior of solutions to the damped wave equation with a nonlinear convection term
3. 学会等名 Nonlinear Wave Seminar (Online)（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------