

令和 6 年 5 月 28 日現在

機関番号：14401

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2020～2023

課題番号：20K22306

研究課題名（和文）Lefschetz-Bottファイバー空間による凸シンプレクティック多様体の研究

研究課題名（英文）Lefschetz-Bott fibrations and convex symplectic manifolds

研究代表者

大場 貴裕（Oba, Takahiro）

大阪大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：50814464

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,200,000円

研究成果の概要（和文）：凸シンプレクティック多様体と呼ばれる空間を、Lefschetz-Bottファイバー空間という構造を用いて研究した。まとめた結果としては、Lefschetz-Bottファイバー空間を用いて、4次元シンプレクティック多様体のシンプレクティック写像類群という群におけるDehnツイストの積の関係式を得た。また、Lefschetz-Bottファイバー空間の研究から派生した研究の結果としては、標準的な接触構造と呼ばれる幾何構造をもつ5次元以上の球面を、力学的な性質とシンプレクティック充填の性質から特徴づけをした。

研究成果の学術的意義や社会的意義

Dehnツイストの積の関係式は曲面の写像類群の場合はよく研究されており、4次元シンプレクティック多様体の構成的な研究に用いられてきた。4次元以上のシンプレクティック多様体の写像類群においては、このような関係式はほとんど知られていない。本研究では、4次元の場合に具体的な関係式を得たことで、高次元シンプレクティック多様体の構成的な研究の糸口を与えたといえる。また、力学系とシンプレクティック充填の観点からの接触多様体の特徴付けは、接触多様体の区別・分類に新たな視点を示唆するものである。

研究成果の概要（英文）：We studied spaces called convex symplectic manifolds using Lefschetz-Bott fibrations. The main results are as follows: by using Lefschetz-Bott fibrations, we obtained a relation between two products of Dehn twists in the symplectic mapping class group of a 4-dimensional symplectic manifold. In addition, as a result of research derived from the study of Lefschetz-Bott fibrations, we characterized spheres of dimension 5 and higher with a geometric structure called the standard contact structure, based on their properties of dynamics and symplectic fillings.

研究分野：位相幾何学

キーワード：Lefschetz-Bottファイバー空間 シンプレクティック多様体 接触多様体 複素多様体

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

### 1. 研究開始当初の背景

シンプレクティック幾何学は古典力学に端を発する。現在では力学系、代数幾何学などの純粋数学のみにとどまらず、ミラー対称性などの物理学由来の数学とも密接に関わり発展し続けている。シンプレクティック多様体は、接触構造という奇数次元多様体上の構造を持つ接触多様体とも深いつながりがある。これらの多様体をつなぐのが凸シンプレクティック多様体である。これは境界付きのシンプレクティック多様体で、その境界は接触多様体である。

凸シンプレクティック多様体の重要な例として、Stein 領域という複素多様体がある。Stein 領域はトポロジカルな道具により体系的な記述が可能である。実際、 $X$  が Stein 領域であることと、 $X$  が Lefschetz ファイバー空間というファイバー構造を許容することが同値であることが知られている：

Stein 領域

Lefschetz ファイバー空間

この同値関係は Stein 領域のトポロジーやシンプレクティック構造に関する研究を大きく進展させた。とくに Lefschetz ファイバー空間は構成的研究において威力を発揮する。例えば、互いにホモトピー同値でない Stein 領域の無限族で、それらの境界が同一の接触多様体である例が、Ozbagci-Stipsicz と報告者により、複素 2 次元と一般次元でそれぞれ Lefschetz ファイバー空間を用いて構成された。

しかし、Stein 領域が凸シンプレクティック全体で占める割合は小さい。特異点解消など、Stein 領域でない凸シンプレクティック多様体にも幾何学的に重要な空間が多く存在する。それゆえ、一般の凸シンプレクティック多様体の研究にも取り組んでいく必要がある。近年、凸シンプレクティック多様体の研究は増えてきたものの、その体系的な研究法はなく、研究は散発的な傾向にある。

こうした背景をもとに、報告者は Lefschetz-Bott ファイバー空間というファイバー構造を凸シンプレクティック多様体のその研究に導入した。これは Lefschetz ファイバー空間を真に含む凸シンプレクティック多様体上のファイバー構造のクラスであり、Lefschetz ファイバー空間のアナロジーとして理論展開ができると報告者は予想した。これを正当化するためには、よい具体例や幾何構造の研究への応用などを明らかにする必要がある。

### 2. 研究の目的

Lefschetz-Bott ファイバー空間を用いた凸シンプレクティック多様体の研究の開拓をする。具体的には以下が目的である：

- (1) このファイバー構造を許容する凸シンプレクティック多様体を明らかにする；
- (2) そのような多様体の幾何学的性質をファイバー構造により解明する。

### 3. 研究の方法

目的別に記す。

(1) 複素孤立特異点の特異点解消上に Lefschetz-Bott ファイバー空間を構成する。研究の取り掛かりとして、まずは Brieskorn-Pham 型と呼ばれる多項式により定義される特異点に着目する。この特異点のリンクに関してはオープンブック分解がすでに知られている。そのモノドロミーの情報から、どのような Lefschetz-Bott ファイバー空間を特異点解消が持つべきかを予想して、構成を試みる。この場合が完成したら、次はこの特異点解消と類似した特徴をもつ複素多様体にも Lefschetz-Bott ファイバー空間を構成することを試みる。

(2) 幾何構造の研究として、エキゾチックな凸シンプレクティック多様体の族、すなわち微分同相であるがシンプレクティック微分同相でないものの族の構成を、Lefschetz-Bott ファイバー空間を用いて構成する。なお、この研究は Myeonggi Kwon 氏 (Jeonbuk National University) と行う。

候補となる凸シンプレクティック多様体の族の構成には、Lefschetz-Bott ファイバー空間を用いる。シンプレクティック構造の区別には、シンプレクティック多様体の不変量であるシンプレクティックホモロジーを用いる。

### 4. 研究成果

成果ごとに分けて記す。

#### (1) Lefschetz-Bott ファイバー空間の構成

項目 3 で記した(1)の研究方法に従って研究を進めたが、大きな進展は残念ながら得られなかった。しかし、いくつかの具体例に対し、構成が上手くいかない原因は研究期間で突き止められ

た．Lefschetz-Bott ファイバー空間がみたすべき臨界面周りの条件を，報告者が構成した写像はみたさないことがわかった．写像を少し摂動することで，この条件をみたすようにできるかを今後の課題としたい．

#### (2) エキゾチックな凸シンプレクティック多様体の族の構成

項目 3 で記した(2)の研究方法に従って研究を進めた．候補となる凸シンプレクティック多様体の族は Lefschetz-Bott ファイバー空間を使って構成した．問題となるのはそれらの区別で，シンプレクティックホモロジーの間の transfer 写像と呼ばれる準同型が重要となる．一般の凸シンプレクティック多様体に対しては，transfer 写像の構成が（少なくとも文献上では）知られておらず，この構成を Kwon 氏と試みた．議論を進めるうち，細部に問題がいくつか見付き，研究期間内には完成できなかった．しかし本質的に難しいと思われる問題点（係数や積構造など）はすでに解決済みであり，令和 6 年度内には完成し，論文にまとめる予定である．

派生した研究からの結果もある．

#### (3) シンプレクティック写像類群の関係式

4 次元シンプレクティック多様体のシンプレクティック写像類群についての結果である．当初は計画していない研究であったが，上記(1)の研究を行っている段階で，報告者自身の Lefschetz-Bott ファイバー空間に関する研究を深く考察し直す機会があり，本結果につながった．具体的な結果としては，4 次元シンプレクティック多様体のシンプレクティック写像類群において，異なる個数の Dehn ツイストたちの積の間の関係式を得た．このような関係式は曲面に対してはよく知られており，シンプレクティック 4 次元多様体の構成に使われた．4 次元以上のシンプレクティック写像類群の場合は，これまでこのような関係式は知られておらず，構成的な研究が進んでいなかった．報告者の結果は，高次元での構成的な研究の糸口となる．また，本結果を単著論文としてまとめ，学術雑誌に投稿中である．

#### (4) 標準的な接触球面の力学系やシンプレクティック充填を用いた特徴づけ

Kwon 氏との共同研究による．接触多様体に対し，力学的に凸であるという概念があり，そのような凸性をもつ接触多様体に関する結果である．本結果では，「標準的な接触構造をもつ球面は，力学系やシンプレクティック充填の観点からどのように特徴づけられるか？」という問いに一つの答えを与えている．例えば，“柔軟な” Weinstein 充填をもつ力学的に凸な 5 次元以上の単連結接触多様体は，標準的な接触球面であることを示した．証明にはシンプレクティックホモロジーや充填の分類結果を用いる．この研究も当初は計画していないものであったが，上記(2)の研究を Kwon 氏と行っている際，シンプレクティックホモロジーの上記の問いへの応用を見出し，この結果に結びついた．なお，この結果は論文にまとめており，Journal of the London Mathematical Society に受理された．

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 1件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Oba Takahiro	4. 巻 0
2. 論文標題 Lefschetz-Bott Fibrations on Line Bundles Over Symplectic Manifolds	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 International Mathematics Research Notices	6. 最初と最後の頁 1-40
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1093/imrn/rnaa144	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Myeonggi Kwon, Takahiro Oba	4. 巻 109
2. 論文標題 On dynamically convex contact manifolds and filtered symplectic homology	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Journal of the London Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 1-26
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1112/jlms.12914	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計23件（うち招待講演 18件 / うち国際学会 3件）

1. 発表者名 大場貴裕
2. 発表標題 余次元2のシンプレクティック部分多様体のトポロジー
3. 学会等名 大阪大学数学教室談話会（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 大場貴裕
2. 発表標題 4次元Dehnツイストの間の関係式
3. 学会等名 リーマン面に関連する位相幾何学（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Takahiro Oba
2. 発表標題 Symplectic submanifolds in dimension 6 from Lefschetz fibrations
3. 学会等名 QSMS workshop on symplectic geometry and related topics (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 大場貴裕
2. 発表標題 ファイバー構造とシンプレクティック多様体のトポロジー
3. 学会等名 第6回数理新人セミナー (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 大場貴裕
2. 発表標題 Symplectic submanifolds in dimension 6 from Lefschetz fibrations
3. 学会等名 2023年度日本数学会年会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 大場 貴裕
2. 発表標題 4次元Dehnツイストの間の関係式と擬正則曲線の手法
3. 学会等名 阪大トポロジーセミナー (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Takahiro Oba
2. 発表標題 A four dimensional mapping class group relation
3. 学会等名 Free math seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 大場 貴裕
2. 発表標題 ファイバー構造とシンプレクティック充填のトポロジー
3. 学会等名 N-K00Kセミナー (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Takahiro Oba
2. 発表標題 A four-dimensional mapping class relation
3. 学会等名 Singularities, arrangements, and low-dimensional topology (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 大場貴裕
2. 発表標題 4次元Dehnツイストの間の関係式
3. 学会等名 接触構造・特異点・微分方程式およびその周辺
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 大場貴裕
2. 発表標題 4次元Dehnツイストの間の関係式
3. 学会等名 日本数学会2022年度年会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 大場貴裕
2. 発表標題 Rational ruled surfaces as symplectic divisors
3. 学会等名 微分トポロジーセミナー（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Takahiro Oba
2. 発表標題 Fibration-like structures and fillings of contact manifolds
3. 学会等名 Incheon National University Symposium（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 大場貴裕
2. 発表標題 Rational ruled surfaces as symplectic divisors
3. 学会等名 4次元トポロジー
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 大場貴裕
2. 発表標題 Rational ruled surfaces as symplectic divisors
3. 学会等名 接触構造・特異点・微分方程式およびその周辺（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 大場貴裕
2. 発表標題 Rational ruled surfaces as symplectic divisors
3. 学会等名 対称性と幾何セミナー（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 大場貴裕
2. 発表標題 シンプレクティック充填のトポロジー
3. 学会等名 横国大幾何トポロジーセミナー（招待講演）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 大場貴裕
2. 発表標題 6次元シンプレクティック多様体とその部分多様体のトポロジー
3. 学会等名 第70回トポロジーシンポジウム（招待講演）
4. 発表年 2023年



1. 発表者名 大場貴裕
2. 発表標題 6次元シンプレクティック多様体内のホモロガスな4次元部分多様体について
3. 学会等名 リーマン面に関連する位相幾何学 (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 大場貴裕
2. 発表標題 球面の単位余接束のシンプレクティック充填について
3. 学会等名 幾何学コロキウム (北海道大学) (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 大場貴裕
2. 発表標題 球面の単位余接バンドルのシンプレクティック充填について
3. 学会等名 日本数学会2024年度年会
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 大場貴裕
2. 発表標題 球面の単位余接束のシンプレクティック充填について
3. 学会等名 Algebraic Geometry, Topology, Combinatorics and Related Topics 2024 ( (招待講演)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 Takahiro Oba
2. 発表標題 Symplectic fillings of unit cotangent bundles of spheres
3. 学会等名 The 4th Taiwan-Japan Joint Conference on Differential Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------