

令和 5 年 5 月 29 日現在

機関番号：14401

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2020～2022

課題番号：20K22310

研究課題名（和文）安定性条件の空間への等長作用を用いた自己同値群の幾何学的研究

研究課題名（英文）Geometry of autoequivalence groups via isometric actions on the space of stability conditions

研究代表者

菊田 康平（Kikuta, Kohei）

大阪大学・大学院理学研究科・助教

研究者番号：10880073

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,200,000円

研究成果の概要（和文）：安定性条件の空間への（等長）作用を通して、導来圏の自己同値群を調べた。具体的にはHochschild entropyの導入、交点数と球面捻りの関係の解明、三角圏の自己同値群の階数2の自由部分群の構成、K3曲面の自己同値群の中心群の決定、曲線の場合の安定性条件の空間のThurstonコンパクト化の構成などが主な成果として挙げられる。

研究成果の学術的意義や社会的意義

代数多様体の自己同値群とは群と呼ばれる数学的対象の一種であり、物理学とも深く関わる導来圏の対称性を記述する。古くから研究されてきた自己同型群を自然に含み、純粋に群論の研究対象としても興味深い。本研究では、安定性条件の空間への群作用を考察することで、自己同値群に関する理解を深めることができた。

研究成果の概要（英文）：We studied autoequivalence groups of derived categories via (isometric) actions on the space of stability conditions. The main topics are as follows: Hochschild entropy, intersection number and spherical twists, constructions of rank 2 free subgroups, the center subgroups of autoequivalence groups for K3 surfaces, Thurston compactifications of the space of stability conditions for curves.

研究分野：代数幾何学，群論

キーワード：K3曲面 導来圏 自己同値群 安定性条件の空間 等長作用

1. 研究開始当初の背景

(1) 代数多様体の導来圏とその自己同値群:

圏とは対象と射からなる数学的对象である。純粋数学における根底をなす重要な概念の1つである。ここでは、ホモロジー代数が自然に機能するという意味で重要な圏である導来圏を考える。以下、代数多様体 X 上の接続層の有界複体を対象とする導来圏 $D^b(X)$ を主に扱う。弦理論における双対性の1つの数学的定式化として、Kontsevich により提唱されたホモロジー的ミラー対称性は、複素代数多様体の導来圏とシンプレクティック多様体の深谷圏の圏同値を主張する。この予想は、導来圏そのものを幾何学的対象とみなす斬新な視点を明確なものにしたという点でも重要である。また双有理同値でない代数多様体の導来圏同値が示すように、代数幾何学においても導来圏は新しい幾何学的現象を提供し、現在では主要な研究対象の1つとなった。従って、代数多様体 X の自己同型群に相当する、導来圏 $D^b(X)$ の自己同値関手のなす自己同値群 $\text{Aut}(D^b(X))$ もまた非常に重要な群である。この自己同値群が本研究の主人公である。

(2) 群の幾何学的研究:

群構造を調べる手法として、距離空間への等長作用を用いた幾何学的手法がある。例えば生成元集合に付随する語距離を考えることで、群の自分自身への等長作用が得られる。これを一般化して、群のある距離空間への等長作用を考察する。群に対して、調べたい性質に応じてその都度扱い易い等長作用を選ぶことが重要である。Gromov の多項式増大度定理やツリーへの等長作用を用いた自由群の特徴付けのように、等長作用を用いた群構造の解析は幾何学的手法において中心的である。以上より次の自然かつ重要な問いが得られる:

問. 代数多様体の導来圏の自己同値群は、どのような距離空間に等長作用するか? またその等長作用を用いて、自己同値群の群構造を調べよ。

(3) 安定性条件の空間:

自己同値群の等長作用の一例として、以下で安定性条件の空間への作用を紹介する。Bridgeland は三角圏 T に対して、安定性条件という概念を定義した。安定性条件のなす集合 $\text{Stab}(T)$ には標準的な複素構造や、距離構造が定まる。このとき古典的ミラー対称性との関係から、自然な C 作用による商空間 $\text{Stab}(T)/C$ とその上の商距離 d_B が重要となる。一方で、 $K3$ 曲面 X の場合 (i.e. $T = D^b(X)$) に限って d_B と異なる距離構造 d_P が定まる。この2つの距離 d_B, d_P に関して、自己同値群が等長的に作用する。

2. 研究の目的

本研究の目的は、安定性条件の空間への等長作用を用いて、導来圏の自己同値群の構造を幾何学的に調べることである。

3. 研究の方法

ホモロジー的ミラー対称性から期待される自己同値群と写像類群の間の類似がどの程度成り立つか、という指導原理のもと研究を遂行する。具体的には自由群などの特徴的な部分群の構成や、安定性条件の空間の Thurston コンパクト化を考察する。

4. 研究成果

(1) 実閉曲面の写像類群の理論に倣って、ping-pong 補題を用いた階数2の自由部分群の構成に取り組んだ。spherical twist の反復作用に関する交点数の挙動の解析が鍵となる。途中から Federico Barbacovi 氏が研究に加わり、設定を大幅に一般化し共著として論文を執筆した。応用として $K3$ 曲面の導来圏の自己同値群とその Calabi-Yau 自己同値群の中心群を決定した。群の可換性から超越自己同型群が自然に現れる点が興味深い。

(2) ホモロジー的ミラー対称性を用いた圏論的エントロピーの応用として、Hochschild エントロピーという概念を導入し、シンプレクティック写像類の Floer 理論的エントロピーとの関係を研究した。これは大内元気氏との共同研究であり、申請時点で予期していなかった成果である。

(3) Teichmüller 空間の Thurston コンパクト化の類似として, Bapat-Deopurkar-Licata によって安定性条件の空間のコンパクト化が提案された. 大内元気氏, 小関直紀氏との共同研究で, 曲線の場合に安定性条件の空間の Thurston コンパクト化を構成した. 全ての種数を完全に調べたが, 特に射影直線の場合に非常に興味深い現象が得られた. また楕円曲線の場合にホモロジー的ミラー対称性を介して Nielsen-Thurston 分類を与えた. 本研究が連接層の導来圏における Thurston コンパクト化の最初の例を与える.
曲線の場合は $K3$ 曲面の場合を見据えたトイモデル的な側面もある. $K3$ 曲面の場合の Thurston コンパクト化の構成に向けて引き続き研究を進めている.

以上が本研究の主な成果で, 既に論文としてまとめられたものである. それ以外にも以下のトピックについて一定の成果が得られた. 引き続き研究を行い, 適宜論文にまとめていく.

(4) 群論において基本的である生成元と関係式について調べた. 特に基本的かつ特殊な例である generic double plane の場合を考察した. また関連して, 安定層のモジュライ空間を経由する自己同値関手と spherical twist の関係や, $K3$ 曲面内の曲線上の spherical sheaf についても考察した.

(5) 実曲面の曲線複体の類似である spherical object のなす複体について, 定義や類似から期待される基本的性質を整理した. 安定性条件の空間とは別の自己同値群が等長作用する空間として, 理解が進むことが期待される.

(6) 安定性条件の空間への等長作用に関するピカル数 1 の $K3$ 曲面の自己同値関手の分類について, elliptic element と parabolic element に関する考察を深めた. 最近 Fan-Lai による elliptic element や, より一般に有限部分群に関する進展があったが, まだまだ発展途上である. また議論の中で安定性条件の空間の $CAT(0)$ 性を十分に使えてない現状があるので, 今後の展望としてより距離構造を用いた研究を進めていく必要がある.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 6件）

1. 著者名 Kohei Kikuta	4. 巻 -
2. 論文標題 Spherical twists and the center of autoequivalence groups of K3 surfaces	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 arXiv:2110.14353	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Kohei Kikuta, Genki Ouchi, Atsushi Takahashi	4. 巻 -
2. 論文標題 Serre dimension and stability conditions	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Mathematische Zeitschrift	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00209-021-02718-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Kohei Kikuta, Genki Ouchi	4. 巻 -
2. 論文標題 Hochschild Entropy and Categorical Entropy	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Arnold Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s40598-022-00210-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Kohei Kikuta	4. 巻 -
2. 論文標題 Curvature of the space of stability conditions	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Manuscripta Mathematica	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00229-022-01389-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Federico Barbacovi, Kohei Kikuta	4. 巻 -
2. 論文標題 Spherical twists, relations and the center of autoequivalence groups of K3 surfaces	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 arXiv:2210.00228	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Kohei Kikuta, Naoki Koseki, Genki Ouchi	4. 巻 -
2. 論文標題 Thurston compactifications of spaces of stability conditions on curves	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 arXiv:2211.08001	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

[学会発表] 計8件 (うち招待講演 8件 / うち国際学会 2件)

1. 発表者名 Kohei Kikuta
2. 発表標題 Rank 2 free subgroups in autoequivalence groups of Calabi-Yau categories
3. 学会等名 東京名古屋代数セミナー (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Kohei Kikuta
2. 発表標題 Spherical twists and the center of autoequivalence groups of K3 surfaces
3. 学会等名 東大京大代数幾何セミナー (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Kohei Kikuta
2. 発表標題 Spherical twists and the center of autoequivalence groups of K3 surfaces
3. 学会等名 大阪大学オンライン代数幾何学セミナー (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Kohei Kikuta
2. 発表標題 Spherical twists and the center of autoequivalence groups of K3 surfaces
3. 学会等名 Guest talk in Lecture "Categories and dynamical systems" at Tsinghua University (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Kohei Kikuta
2. 発表標題 K3曲面の自己同値群と写像類群: 距離空間への等長作用
3. 学会等名 第69回幾何学シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Kohei Kikuta
2. 発表標題 K3曲面の導来圏の自己同値群
3. 学会等名 第67回代数数学シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Kohei Kikuta
2. 発表標題 Fixed points on the spaces of stability conditions and Thurston compactifications
3. 学会等名 Workshop on Mirror symmetry and Related Topics Kyoto 2022 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Kohei Kikuta
2. 発表標題 Autoequivalence groups of K3 surfaces and Mapping class groups
3. 学会等名 The 8th KTGU Mathematics Workshop for Young Researchers (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

<p>ホームページ https://sites.google.com/view/koheikikuta-math</p>
--

6. 研究組織		
氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
英国	University College London	The University of Liverpool		