様　式　C－19、F－19－1、Z－19　（共通）

科研費 KAKENHI

# 科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　４ 年　６ 月 ２２ 日現在

機関番号：５２２０１
研究種目：研究活動スタート支援
研究期間：2020～2021
課題番号：２０Ｋ２２３１７

研究課題名（和文）高次元アフィン代数多様体における消去問題の研究

研究課題名（英文）Research on cancellation problems for higher dimensional affine varieties

研究代表者
長峰　孝典（Nagamine, Takanori）

小山工業高等専門学校・一般科・助教

研究者番号：１０８８２５１６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,200,000円

研究成果の概要（和文）：与えられた環がUFDであることを示す新たな判定方法6種類構成した．そのうち2種類は1964年にP. Samuel氏が構成した判定方法の一般化になっている．この2つを利用することで他の判定方法が構成できた．特に，1977年に森重文氏によって与えられた判定方法の一般化も与えている．これらUFD判定方法の応用として，次の4つを構成した．1) 3次元の有理的UFDの族とそれらの最小生成系の個数，2) ネーター的でない3次元の有理的な次数付きUFDの族，3) 3項式で定義されるUFDの族，4) ブルバキの演習問題の反例．特に 3) で構成したUFDには幾何学的意味がある．

研究成果の学術的意義や社会的意義
3項式で定義されるUFDは，複雑性が1のトーラスの作用を持つアフィン代数多様体に対応し，2次元の場合は森重文氏（1977年），3次元の場合は石田正典氏（1977年），そして基礎体の標数が0の場合に限り一般次元で，J. Hausen氏，E. Herppich氏およびH. Suss氏（2011年）が分類を与えている．上記のどの研究も幾何学的な手法を用いているが，本研究では代数的な手法のみを用いている．その結果，基礎体の条件に依存しない議論が可能である．特に我々が構成したUFDは，基礎体が代数的閉体である必要はなく，その標数も任意の場合で得られている．

研究成果の概要（英文）：We construct 6 criteria for a ring to be a unique factorization domain. Two of them are generalizations of Samuel's criteria in 1964. We also give a generalization of Mori's criterion in 1977. As applications of these criteria, we construct the following: 1) 3 dimensional rational UFDs and the minimum number of generators of them, 2) Non-noetherian rational graded UFDs of dimension 3, 3) UDFs defined by trinomial relations, 4) A counterexample of exercises in the Bourbaki. In particular, UDFs obtained in 3) has a geometric aspect.

研究分野：アフィン代数幾何学

キーワード：消去問題　ザリスキ問題　一意分解整域（UFD）　次数付き環

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

本研究では, アフィン代数多様体における**「消去問題」**に取り組む. 消去問題とは, アフィン代数多様体$X$と$Y$が$X \times \mathbb{A}^1 \cong Y \times \mathbb{A}^1$をみたすとき, $X \cong Y$となるかを問う問題である. この問題は, 1971 年に D. Coleman 氏と E. Enochs 氏により提唱された. 1972 年に S. S. Abhyankar 氏, P. Eakin 氏, W. Heinzer 氏らは 1 次元の場合を肯定的に解決した. 2 次元以上の場合は反例があり, 有名なものは 1989 年に W. Danielewski 氏が構成した反例である. さらに 2014 年に N. Gupta 氏は, 3 次元の場合, 特に$Y = \mathbb{A}^3$の場合に反例を与えた. なお$Y = \mathbb{A}^n$の場合, つまり$X \times \mathbb{A}^1 \cong \mathbb{A}^{n+1}$のとき$X \cong \mathbb{A}^n$となるかを問う場合の問題は「ザリスキ問題」と呼ばれ, N. Gupta 氏の例はザリスキ問題の初めての反例である.

近年では新たな反例構成を目指した研究が主流で, W. Danielewski 氏の反例や N. Gupta 氏らが構成した反例の一般化・高次元化が進んでいる (増田佳代氏, N. Gupta 氏, A. Dubouloz 氏など). その結果, 2 次元以上のすべての場合で, 消去問題の反例は構成された.

しかしながら, 応用のためには消去問題の成立条件を明らかにする必要がある. たとえば, 高次元の (アフィン) 代数多様体を研究する際に, ファイブレーションによって低次元のものに分解して行う研究が活発になされている. 消去問題の成立条件は特に, 一般ファイバーが$\mathbb{A}^1$となる代数多様体の構造解明へ寄与する.

２．研究の目的

本研究では上記の消去問題を一般化し, それぞれの自然数$\boldsymbol{n}$ごとに

$$X \times \mathbb{A}^n \cong Y \times \mathbb{A}^n \implies X \cong Y$$

をみたすアフィン代数多様体はどのようなものかを調べる. 本申請書を通して, 上式をみたすアフィン代数多様体を**「$\boldsymbol{n}$消去可能である」**と呼ぶ. 本研究の目的は, **体$\boldsymbol{k}$上のアフィン代数多様体がどのようなときに$\boldsymbol{n}$消去可能となるかを明らかにし, その$\boldsymbol{k}$同型類を決定すること**である.

３．研究の方法

本研究ではザリスキ問題について, $n$消去可能性に着目し研究を行う. 前述の通りザリスキ問題とは消去問題$Y = \mathbb{A}^n$の場合に相当し, 本研究ではそれを一般化し,

$$X \times \mathbb{A}^m \cong \mathbb{A}^{m+n} \text{のとき} X \cong \mathbb{A}^n$$

となるかを問う問題を考える. さらに以下の関係性に着目して考察対象を広げ, $\mathbb{A}^n$のレトラクト (定義は割愛) や座標環$k[X]$が UFD となるアフィン代数多様体に着目する.

$$X \cong \mathbb{A}^n \implies X \times \mathbb{A}^m \cong \mathbb{A}^{m+n} \implies X \text{は} \mathbb{A}^{m+n} \text{のレトラクト} \implies \text{座標環} k[X] \text{は UFD.}$$

そのため, 座標環$k[X]$が UFD となるアフィン代数多様体に着目し研究を行うことは有効である. したがって, 以下の 2 点を解決することは本研究の進展につながる.

(i) 体$\boldsymbol{k}$上有限生成な整域が与えられたとき, それが UFD だと判定する方法.
(ii) 体$\boldsymbol{k}$上有限生成な UFD が与えられたとき, その生成元と関係式を特定する方法.

上記 (i) については学術論文として出版するまでの研究成果 [3] を得ることができたので, 次ページで成果の詳細を報告する.

## ４．研究成果

### (1) UFD 判定について

まず, 与えられた環が UFD であることを示す新たな判定方法について説明する. 以下の通り 6 種類の判定方法を構成した.

**定理.** $A$, $S$, $T$をネーター的 UFD とする. このとき以下の 6 種類の環$B$は UFD である.

① $B = A[X]/(aX - b)$: ただし$a$と$b$は互いに素で, $a$の素因子$p$と$b$が生成するイデアル$(p, b)$は$A$の素イデアルとなる.

② $B \subset (S \cap T)$: ただし$B$は Krull 整域, $S$と$T$は$B$加群として有限生成で商体の拡大次数$[Q(S): Q(B)]$と$[Q(T): Q(B)]$は互いに素.

③ $B = A[Z]/(Z^c - F)$: ただし$A$は$\mathbb{Z}$次数付き環, $F \in A$は既約な斉次元で$\gcd(c, \deg F) = 1$.

④ $B = A[Z]/(aZ^n - b)$: ただし$A$は$\mathbb{Z}$次数付き環, $a$と$b$は互いに素で$b$は$A$の素元, $a$の素因子$p$と$b$が生成するイデアル$(p, b)$は$A$の素イデアル, $\gcd(n, \deg b - \deg a) = 1$.

⑤ $B = A[Z_1, \dots, Z_n]/(Z_1^{e_1} \cdots Z_n^{e_n} - F)$: ただし$A$は$\mathbb{Z}$次数付き環, $F \in A$は既約な斉次元で$\gcd(e_1, \dots, e_n, \deg F) = 1$.

⑥ $B = A[X_1, \dots, X_n]/(X_1^{e_1} - a_1, \dots, X_n^{e_n} - a_n)$: ただし$A$は$\mathbb{Z}$次数付き環, 各$a_i$は$A$の素元で$a_i A \neq a_j A\ (i \neq j)$, $\gcd(e_i, e_j) = 1\ (i \neq j)$, $\gcd(e_i, \deg a_i) = 1\ (1 \leq i \leq n)$.

上記の判定方法 ① および ③ は 1964 年に P. Samuel 氏が構成した判定方法 [7] の一般化になっている. この 2 つを利用することで ④, ⑤, ⑥ の判定方法が構成できた. 判定方法 ② については, ③ を導く際に必要である. 特に判定方法 ⑥ については, 1977 年に森重文氏によって与えられた判定方法 [6] の一般化になっている.

### (2) UFD 判定方法の応用について

次に (1) で得られた判定方法を利用して得られた結果について説明する. 主に以下の 4 つを構成した.

⑦ 3 次元の有理的 UFD の族とそれらの最小生成系の個数.
⑧ ネーター的でない 3 次元の有理的な次数付き UFD の族.
⑨ 3 項式で定義される UFD の族.
⑩ ブルバキ [1] の演習問題の反例.

上記 ⑦ で現れる UFD は, 4 変数多項式環上のある局所冪零導分の核 (基礎体の加法群の作用による不変式環) として現れる環に一致する. この場合, 局所冪零導分の核が有限生成になるかどうかという問題 (Hilbert の第 14 問題の特別な場合に相当) は未解決である. しかし, その生成元の最小個数を決定したことで, 任意の個数の元で生成される核を持つ局所冪零導分の存在が明らかになった. これは共著者の D. Daigle 氏および G. Freudenburg 氏の結果 [2] の精密化になっている.

⑧ および ⑨ は ⑦ の UFD を考察している中で構成されたものである. 特に ⑨ の 3 項式で定義される UFD は, 複雑性が 1 のトーラスの作用 (torus actions of complexity one) を持つアフィン代数多様体の座標環となっており, 幾何学的にも意味があるものである. ⑩で構成した例は次元 4 のネーター的ではない UFD で, ⑧ の考察から生まれた副産物的な例である.

(3) 得られた成果の国内外における位置付けとインパクト

前述の通り, ⑨ で構成した UFD には幾何学的意味がある. 基礎体が代数的閉体のとき, 複雑性が 1 のトーラスの作用を持つアフィン代数多様体は分類されている. 2 次元の場合は森重文氏 [6], 3 次元の場合は石田正典氏 [5], そして基礎体の標数が 0 の場合に限り一般次元で, J. Hausen 氏, E. Herppich 氏および H. Süss 氏 [4] が分類を与えた. 上記のどの研究も幾何学的な手法を用いているが, 本研究では代数的な手法のみを用いている. その結果, 基礎体の条件に依存しない議論が可能である. 特に我々が構成した UFD は, 基礎体が代数的閉体である必要はなく, その標数も任意の場合で得られている.

(4) 今後の展望

今後の研究では, J. Hausen 氏, E. Herppich 氏および H. Süss 氏 [4] が行った, 標数 0 の代数的閉体上の分類を, 任意標数の場合への拡張に取り組む. それと合わせて, 次元毎に UFD の (生成関係式を含めた) 分類を行う. 特に, 3 次元の場合である程度の分類ができれば, ザリスキ問題の未解決な場合への新たなアプローチとなる.

(5) 参考文献

[1] N. Bourbaki, Commutative Algebra, Elements of Math., Addison-Wesley, Reading, MA, 1972.

[2] D. Daigle, G. Freudenburg, A note on triangular derivations of $k[X_1, X_2, X_3, X_4]$, Proc. Am. Math. Soc. **129** (2001), 657--662.

[3] D. Daigle, G. Freudenburg, T. Nagamine, Generalizations of Samuel's criteria for a ring to be a unique factorization domain, J. Algebra **594** (2022), 271--306.

[4] J. Hausen, E. Herppich, H. Süss, Multigraded factorial rings and Fano varieties with torus actions, Doc. Math. 16 (2011) 71--109.

[5] M. Ishida, Graded factorial rings of dimension 3 of a restricted type, J. Math. Kyoto Univ. 17 (1977) 441--456.

[6] S. Mori, Graded factorial domains, Jpn. J. Math. **3** (1977), 224--238.

[7] P. Samuel, Lectures on Unique Factorization Domains, Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics, vol.30, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1964.

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計1件（うち査読付論文　1件／うち国際共著　1件／うちオープンアクセス　0件）

| | |
|---|---|
| １．著者名<br>Daigle Daniel、Freudenburg Gene、Nagamine Takanori | ４．巻<br>594 |
| ２．論文標題<br>Generalizations of Samuel's criteria for a ring to be a unique factorization domain | ５．発行年<br>2022年 |
| ３．雑誌名<br>Journal of Algebra | ６．最初と最後の頁<br>271～306 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）<br>10.1016/j.jalgebra.2021.11.031 | 査読の有無<br>有 |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著<br>該当する |

〔学会発表〕　計7件（うち招待講演　4件／うち国際学会　1件）

| |
|---|
| １．発表者名<br>長峰孝典 |
| ２．発表標題<br>Generalizations of Samuel ’ s criteria for a ring to be a unique factorization domain |
| ３．学会等名<br>オンライン可換環論セミナー2021 |
| ４．発表年<br>2021年 |

| |
|---|
| １．発表者名<br>長峰孝典 |
| ２．発表標題<br>A family of strongly invariant algebras |
| ３．学会等名<br>第1回情報数理セミナー |
| ４．発表年<br>2021年 |

| |
|---|
| １．発表者名<br>長峰孝典 |
| ２．発表標題<br>A family of strongly invariant algebras |
| ３．学会等名<br>第42回可換環論シンポジウム |
| ４．発表年<br>2021年 |

| |
|---|
| １．発表者名<br>長峰孝典 |
| ２．発表標題<br>Generalizations of Samuel's criteria for a ring to be a unique factorization domain |
| ３．学会等名<br>第17回多項式環論セミナー（招待講演） |
| ４．発表年<br>2021年 |

| |
|---|
| １．発表者名<br>長峰孝典 |
| ２．発表標題<br>Some criteria for a ring to be a unique factorization domain |
| ３．学会等名<br>第20回アフィン代数幾何学研究集会（招待講演）（国際学会） |
| ４．発表年<br>2022年 |

| |
|---|
| １．発表者名<br>長峰孝典 |
| ２．発表標題<br>Some criteria for a ring to be a unique factorization domain |
| ３．学会等名<br>特異点セミナー（招待講演） |
| ４．発表年<br>2022年 |

| |
|---|
| １．発表者名<br>長峰孝典 |
| ２．発表標題<br>A family of strongly invariant algebras |
| ３．学会等名<br>第16回多項式環論セミナー（招待講演） |
| ４．発表年<br>2020年 |

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

6．研究組織

| | 氏名<br>（ローマ字氏名）<br>（研究者番号） | 所属研究機関・部局・職<br>（機関番号） | 備考 |
|---|---|---|---|

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

8．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

| 共同研究相手国 | 相手方研究機関 | | | |
|---|---|---|---|---|
| 米国 | Western Michigan University | | | |
| カナダ | University of Ottawa | | | |