

様 式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19（共通）

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書



令和 5 年 6 月 9 日現在

機関番号：12612

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2020～2022

課題番号：20K22318

研究課題名（和文）CR多様体の不変量および不変微分作用素の研究

研究課題名（英文）Research on invariants and invariant differential operators on CR manifolds

研究代表者

丸亀 泰二（Marugame, Taiji）

電気通信大学・大学院情報理工学研究科・准教授

研究者番号：50872983

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 1,500,000 円

研究成果の概要（和文）：CR多様体と呼ばれる、複素多様体内の実超曲面を抽象化した多様体の幾何学的な不変量や不変微分作用素を構成する研究を行った結果、従来知られている完備Einstein計量やアンビエント計量を精密化するための一定の指針を得ることができた。特に、3次元CR多様体に付随するアンビエント計量については、共形幾何における非斉次アンビエント計量に対する新たな正規化条件を見出し、CR GJMS作用素という不変微分作用素の存在定理に別証明を与えることができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

不変量や不変微分作用素の構成は微分幾何学、特にCR幾何学において基本的な問題であり、複素解析などの他分野との結びつきも深い。また、構成において異なる幾何構造間の対応関係をうまく利用する点も興味深く、基礎研究としての意義がある。

研究成果の概要（英文）：I studied on constructions of geometric invariants and invariant differential operators on manifolds endowed with CR structure, which is a geometric structure modeled on real hypersurfaces in a complex manifold. As a result, I found some possible ways to generalize the construction via complete Einstein metric or ambient metrics. In particular, I obtained a refinement of the ambient metric associated with three dimensional CR manifolds by using inhomogeneous ambient metric in conformal geometry and gave another proof to the fact that CR three-manifolds admit CR GJMS operators of all orders.

研究分野：幾何学

キーワード：CR多様体 Einstein計量 アンビエント計量 CR不変量 CR不変微分作用素

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

## 1. 研究開始当初の背景

本研究の背景としては、CR 多様体の幾何学的な不変量や不変微分作用素を構成するという問題意識があった。CR 多様体は、複素多様体の実超曲面を抽象化した対象であり、CR 多様体の不変量や不変微分作用素を構成することは CR 幾何学や多変数複素関数論における重要な問題のひとつである。また、それらの構成において、CR 多様体を境界にもつ領域上の複素幾何や Einstein 計量の幾何学を用いることができるため、異なる幾何構造の間の不思議な対応関係の例としても興味深い問題といえる。

## 2. 研究の目的

CR 多様体を境界にもつ有界強擬凸領域上には、Cheng-Yau 計量とよばれる完備 Kahler-Einstein 計量が存在する。以前の研究において、Cheng-Yau 計量の繰り込まれた特性形式を利用することにより、境界の大域的 CR 不変量の族が構成できることがわかっていた。しかし、これらの不変量に対応する CR 多様体上の曲率量であって、接触形式の取り換えに関する変換則から積分の不変性が説明されるようなものは、限定的な場合を除いて構成できていなかった。本研究の目的のひとつは、そのような曲率量を Cheng-Yau 計量やそれと等価なアンビエント計量等を利用して構成することであった。また、Cheng-Yau 計量やアンビエント計量を用いると、CR GJMS 作用素とよばれる CR 不変作用素を構成することができるが、これらの計量の境界漸近展開における高次の項の不定性により、作用素の階数に制限がついてしまう。3 次元 CR 多様体の場合には、ACH Einstein 計量という、Cheng-Yau 計量を含むより広いクラスの計量を考えることにより、この制限を超えて不変微分作用素を構成できることが以前の研究でわかっていた。この構成の高次元化が本研究のふたつめの目的であった。

## 3. 研究の方法

3 次元 CR 多様体の場合には、Cheng-Yau 計量の代わりに、自己双対方程式を満たす ACH Einstein 計量によって内部を埋めることにより、すべてのオーダーで CR GJMS 作用素を構成することができる。自己双対方程式は 4 次元の計量に対してしか定義できないため、高次元の場合には、その代わりとなる正規化条件を考察し、境界漸近展開が無限次のオーダーまで境界の局所 CR 幾何で記述可能な計量を構成することを考える。また、同様の正規化条件をアンビエント計量に対しても考察する。

## 4. 研究成果

Cheng-Yau 計量の繰り込まれた特性形式を利用して得られる大域的 CR 不変量の研究については、対応する曲率量の構成に関しては進展を得ることができなかったが、不変量の構成のプロセスを再吟味した結果、特性形式をさらに一般化した場合にも不変量が構成できることが判明した。しかし、これらの不変量が非自明なものであるかどうかや、すでに構成されたものと独立なものになっているかどうかはわかっていない。ACH Einstein 計量の精密化については、内在的な正

規化条件を見出すことが困難だったため、外在的な条件を考察した結果、一定の方針が得られた。この方針では、ある微分方程式を満たすテンソル量を構成することが最初のステップになるが、特別な条件下でそのようなテンソルを構成することができた。一般の場合は今後の研究課題となる。また、3次元 CR 多様体の場合には自己双対性という自然な正規化条件が存在するため、それに対応するアンビエント計量の精密化も存在すると予想されるが、そのようなアンビエント計量の候補を見出すことができた。これは、共形幾何学において Graham-Hirachi によって構成された非斉次なアンビエント計量を、3次元 CR 多様体に付随する Fefferman 共形構造の場合に精密化したものになっており、この計量を利用することによって、3次元 CR 多様体には任意のオーダーの CR GJMS 作用素が存在するという事実の別証明を得ることができた。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件／うち国際共著 0件／うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Taiji Marugame	4. 巻 377
2. 論文標題 Renormalized characteristic forms of the Cheng-Yau metric and global CR invariants	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Advances in Mathematics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.aim.2020.107468	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Taiji Marugame	4. 巻 78
2. 論文標題 Global secondary CR invariants in dimension five	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Differential Geometry and its Applications	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.difgeo.2021.101804	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計3件（うち招待講演 3件／うち国際学会 0件）

1. 発表者名 丸亀泰二	
2. 発表標題 The Cheng-Yau metric on strictly pseudoconvex domains and global CR invariants	
3. 学会等名 阪大幾何セミナー（招待講演）	
4. 発表年 2021年	

1. 発表者名 丸亀泰二	
2. 発表標題 Cheng-Yau計量の特性形式とCR不変量	
3. 学会等名 第63回函数論シンポジウム（招待講演）	
4. 発表年 2021年	

1．発表者名 丸亀泰二
2．発表標題 Constructions of CR GJMS operators in dimension three
3．学会等名 複素解析幾何セミナー（招待講演）
4．発表年 2022年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6．研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------