

令和 6 年 6 月 4 日現在

機関番号：14301

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2020～2023

課題番号：20K22319

研究課題名（和文）2次元結び目とYang-Millsゲージ理論について

研究課題名（英文）2-knots in S^4 and Yang-Mills gauge theory

研究代表者

谷口 正樹 (Taniguchi, Masaki)

京都大学・理学研究科・助教

研究者番号：30880520

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,200,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では、2次元結び目のSeifert超曲面と結び目群の関係をYang-Millsインスタントンゲージ理論を用いて調べることがその主題であった。その主要な道具として、ホモロジー3球面に対してYang-Millsインスタントンゲージ理論を用いて定義される不変量 r_s の、結び目、および3次元多様体の1-parameter族に対する一般化を定式化した。これらを用いた数々の応用が主な研究成果である。

研究成果の学術的意義や社会的意義

インスタントンゲージ理論を4次元トポロジーに応用する動きは、Donaldsonによって始められ、現在までの間に多くの研究がある。一方で、主にアメリカで発展したHeegaard Floer理論では不変量の計算や応用の幅の広さを見張るものがあり、インスタントンFloer理論では現在回復不能なものも多くある。一方で申請者は2次元結び目の補空間の基本群というより幾何的な対象を定量的に扱う、インスタントンFloer理論ならではの手法を進めてきた。現在そのようにして得られている結果の他の理論を用いた別証明はなく、4次元トポロジーへの寄与を大きいと考えられる。

研究成果の概要（英文）：In this study, the main theme was to investigate the relationship between Seifert hypersurfaces of 2-dimensional knots and knot groups using Yang-Mills instanton gauge theory. As a key tool, we utilized the invariant r_s ; defined using Yang-Mills instanton gauge theory on homology 3-spheres, which is generalized to knots and 1-parameter family of 3-manifolds. The main research achievements include numerous applications based on these formulations.

研究分野：インスタントンゲージ理論と2次元結び目

キーワード：2次元結び目 Seifert超曲面 Yang-Millsゲージ理論 インスタントンFloer理論 コンコードانس Fr
oyshov不変量 特異インスタントン理論 結び目群のSU(2)表現

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

滑らかな(位相的) 2次元結び目とは、4次元球面に滑らかに(連続に)埋め込まれた2次元球面のことである。本研究ではYang-Mills ゲージ理論を用いた4次元多様体の発展させ、その応用として2次元結び目を研究する。

研究の背景を説明する。Yang-Mills ゲージ理論は1983年に発表されたDonaldsonの論文を始まりとして、微分トポロジーにおける4次元特有の現象を明らかにしてきた。例えば、4次元のユークリッド空間は、無限種類の微分構造を許容することが明らかとなった。一方、4次元以外においてユークリッド空間はただ一つの微分構造しか許容しないという点で、この結果は注目された。その後、Donaldson 不変量と呼ばれる4次元多様体の不変量が定式化され、境界付き4次元多様体に対してはインスタントン Floer 理論として理論が整備されている。

2次元結び目は4次元空間に埋め込まれた2次元の球面であり、その歴史は、1925年のArtinの論文[Hamb, Abh. 4(1925)174-177]に遡り、現在までの間に、不変量、表示方法の様々な研究がなされてきた。本研究で用いる、古典的な不変量として、結び目群(結び目補空間の基本群)が知られている。一方で、「滑らかな2次元結び目と位相的2次元結び目の差異」に着目する研究は当時は未だなかった。

2次元結び目をYang-Mills ゲージ理論を用いて研究する手法は現在次の二つが知られている：

- 2次元結び目に singularity を持つ singular connection に対し理論展開する
- 2次元結び目に沿って surgery してられる4次元多様体に対して理論展開する

前者は、Kronheimer-Mrowka によって理論展開され、いくつかの結果がすでに得られている。例えば、reducible のないあるクラスの $SO(3)$ -bundle の場合で、2次元結び目の meridian 方向の holonomy の order が漸近的に2になる状況を考えると、誘導される singular knot Floer homology の準同型が、2次元結び目の結び目型に依存しない、という事実が示されている。これは、2次元結び目に沿った double branched cover 上で involution 不変な instanton モジュライ空間を考えることに相当する。Kronheimer-Mrowka は、この事実の自然な拡張として、 E_2 -term が Khovanov homology であり、収束先が singular knot Floer homology になるようなスペクトル系列を構成した。これにより Khovanov homology が unknot detector であることを示されている。

後者は、昨年、論文[arXiv:1910.02234]において、Yang-Mills ゲージ理論を用いて、「滑らかな2次元結び目と位相的2次元結び目の差異」を露わにする現象を発見した。その現象は、滑らかな2次元結び目に対して「Seifert 超曲面の複雑さ」と「結び目群の複雑さ」が結びつく、というもので、位相的2次元結び目に対しては成り立たず、反例が存在する。ここで、「2次元結び目の Seifert 超曲面」とは、4次元球面に埋め込まれたコンパクト向き付け可能な3次元多様体で、その境界が与えられた2次元結び目と一致するものである。

2. 研究の目的

この研究では、後者の方法を発展させることを考える、すなわち、2次元結び目に沿う手術によって現れる4次元多様体に対してYang-Mills ゲージ理論を展開することで、「滑らかな2次元結び目特有の性質」を明らかにする。一方で、Yang-Mills ゲージ理論において、限定的な3・4次元多様体しか扱えない現状があり、そのため限定的な2次元結び目しか扱えない。本研究は、Yang-Mills ゲージ理論の技術的な発展も試み、またその結果を2次元結び目に応用するものである。また、2次元結び目を超えて、より多くのクラスの境界付き2次元結び目を扱える枠組みを考察する。この方向性で4次元トポロジーの一つの方向性を切り開く。

3. 研究の方法

本研究では、[arXiv:1910.02234]で行った研究を、より一般的な状況に拡張する。[arXiv:1910.02234]の手法は、滑らかな2次元結び目に沿って手術することで得られる4次元多様体上で、Yang-Mills ゲージ理論を展開する、というものである。具体的には、得られた4次元多様体に、ある3次元多様体で切り込みを入れ、それにより得られる境界付き4次元多様体上で、anti-self-dual 方程式と呼ばれる非線形偏微分方程式の解の空間を観察し、滑らかな場合特有の現象を得る。ここで現れる「切り込みである3次元多様体」が、Seifert 超曲面から定まる、というストーリーである。ここで重要になるのは、3次元多様体に対して定義される、 r_3 不変量と呼ばれるホモロジー同境不変量である。この不変量は、あるクラスのホモロジー3球

面に対してのみ定義されている状況であり、それにより扱える 2 次元結び目のクラスにも制約が付いている。

4. 研究成果

上記のホモロジー 3 球面に対する不変量 $r_s(Y)$ を次の状況に拡張した：

- ホモロジー 3 球面 Y とその中の結び目 K に対して定まる不変量 $r_s(Y, K)$
 - ホモロジー 3 球面 Y とその上の向きを保つ微分同相 f に対して定まる不変量 $r_s(Y, f)$
- 両者、ホモロジー 3 球面に対する不変量 $r_s(Y)$ の適切な意味での拡張になっている。それぞれ
- Daemi, Imori, Sato, Scaduto との共同研究 [arXiv:2209.05400]
 - Alferi, Dai, Mallick との共同研究 [arXiv:2309.02309]
- において、その定式化を行なった。

一つの目の研究の応用として、境界付き 2 次元結び目に関する応用がある。これは次のように state される：

定理 ([arXiv:2209.05400], Daemi, Imori, Sato, Scaduto, Taniguchi)：

K を quasi-positive で slice でない S^3 内の結び目とする。この時、 $K \# -K$ を境界にもつ種数 0 の 2 次元結び目の補空間の基本群は \mathbb{Z} と同型になれない。

定理 ([arXiv:2209.05400], Daemi, Imori, Sato, Scaduto, Taniguchi)：

K を algebraically slice でない S^3 内の結び目とする。この時、 $K \# -K$ を境界にもつ種数 0 の 2 次元結び目の補空間の基本群は \mathbb{Z} と同型になれない。

これらは、[arXiv:1910.02234] で証明されていた結果の、ある種の境界付き版と言える statement である。

また、後者の不変量の応用として、向き付け不可能な曲面の場合にも次がわかる：

定理 ([arXiv:2309.02309], Alferi, Dai, Mallick, Taniguchi)

ある slice knot J が存在して、次を満たす：

- (1) J は補空間の基本群が \mathbb{Z}_2 と同型であるような、double branched cover が definite になる滑らかに埋め込まれた向き付け不可能曲面の境界にならない。
- (2) J の二重分岐被覆は滑らかで contractible な 4 次元多様体の境界になる。

この結果も [arXiv:1910.02234] で証明されていた結果の、境界付き、かつ向き付け不可能な場合に対応するような statement である。これらの事実の Yang-Mills ゲージ理論以外を用いた証明は知られておらず、様々な形で 2 次元結び目の補空間の基本群の複雑さを測るものになっている。これらの結果は国際雑誌に投稿中である。

以下、より詳しくその構成を述べる。

- Daemi, Imori, Sato, Scaduto との共同研究 [arXiv:2209.05400]

この研究では、結び目に沿って singularity を持つ、singular connection を用いて理論展開を行なった。この状況で、可約な接続を入れて理論展開を始めにしたのは、Daemi-Scaduto である。この枠組みをより一般的に展開することで $r_s(Y, K)$ を定式化し、その連結和公式、非自明性の確認を行なった。特に、Kronheimer-Mrowka によってすでに定義されていた $s^{\#}$ 不変量と結びつけることで、不変量の非自明性を保証する議論を確立した。これと、 $r_s(Y, K)$ が曲面の補空間の基本群に関して非自明な結論を導くことは、元の $r_s(Y)$ に対する議論と同様に行われる。

- Alferi, Dai, Mallick との共同研究 [arXiv:2309.02309]

この研究では、 Y 上の有向微分同相 f から mapping cylinder として定まる 4 次元の cobordism に対して Yang-Mills ゲージ理論を展開し、その情報を用いて不変量 $r_s(Y, f)$ を定義した。この不変量は、4 次元ホモロジー同境上に微分同相が拡張される時に境界のホモロジー 3 球面たちの不変量の間不等式が走る。この不変量の計算はまだまだ困難な場合が多く、唯一、 9_{46} の鏡像の 1-手術に対してのみ非自明性を確認できている。これには $K3$ 曲面の Donaldson 不変量、Akbulut の cork の埋め込みを使う。またこの不変量を 4 次元多様体に埋め込まれた局面に対して考察する場合は、曲面に沿って二重分岐被覆をとり、その境界に現れる involution を f とし、そこから曲面の補空間の基本群の情報を得る、というような議論を経る。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 2件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Masaki Taniguchi	4. 巻 13
2. 論文標題 Seifert hypersurfaces of 2-knots and Chern-Simons functional	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Quantum Topology	6. 最初と最後の頁 335 ~ 405
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4171/QT/165	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Nobuo Iida and Masaki Taniguchi	4. 巻 58
2. 論文標題 Seiberg-Witten Floer Homotopy Contact Invariant	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica	6. 最初と最後の頁 505 ~ 558
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1556/012.2021.01511	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Sato Kouki, Taniguchi Masaki	4. 巻 20
2. 論文標題 Rational homology 3-spheres and simplyconnected definite bounding	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Algebraic & Geometric Topology	6. 最初と最後の頁 865 ~ 882
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2140/agt.2020.20.865	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Konno Hokuto, Taniguchi Masaki	4. 巻 222
2. 論文標題 Positive scalar curvature and 10/8-type inequalities on 4-manifolds with periodic ends	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Inventiones mathematicae	6. 最初と最後の頁 833 ~ 880
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00222-020-00979-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

[学会発表] 計29件(うち招待講演 28件/うち国際学会 13件)

1. 発表者名 谷口正樹
2. 発表標題 Construction of equivariant singular knot Floer homology I
3. 学会等名 微分トポロジー23(招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 谷口正樹
2. 発表標題 Construction of equivariant singular knot Floer homology II
3. 学会等名 微分トポロジー23(招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 谷口正樹
2. 発表標題 Concordance invariants from equivariant singular instanton Floer theory
3. 学会等名 Symplectic Geometry, Gauge Theory, and Categorification Seminar(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 谷口正樹
2. 発表標題 Instantons, special cycles, and knot concordance II
3. 学会等名 ハンドルセミナー(招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 谷口正樹
2. 発表標題 Instantons, special cycles, and knot concordance I
3. 学会等名 ハンドルセミナー (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 谷口正樹
2. 発表標題 Concordance Invariants from Equivariant Singular Instanton Theory
3. 学会等名 FHT Program Seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 谷口正樹
2. 発表標題 Singular instanton knot homology and Rasmussen type invariant
3. 学会等名 ゲージ理論セミナー (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Masaki Taniguchi
2. 発表標題 Positive scalar curvature and homology cobordism invariants, 4-dimensional topology
3. 学会等名 Four Dimensional Topology (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Masaki Taniguchi
2. 発表標題 An adjunction inequality for the Bauer-Furuta type invariants, with applications to sliceness and 4-manifold topology
3. 学会等名 Low dimensional Contact and Symplectic Topology (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Nobuo Iida and Masaki Taniguchi
2. 発表標題 Seiberg-Witten Floer homotopy and Contact Structure
3. 学会等名 Intelligence of Low-dimensional Topology 2021 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Masaki Taniguchi
2. 発表標題 Yang-Mills gauge theory and knotted 2-sphere in the 4-space
3. 学会等名 微分トポロジー20 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Masaki Taniguchi
2. 発表標題 Gauge theory and knotted 2-spheres in the 4-space
3. 学会等名 K00K拡大セミナー2020 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Masaki Taniguchi
2. 発表標題 Knotted 2-spheres in the 4-space and Yang-Mills gauge theory
3. 学会等名 International Workshop on 4-Manifold Theory and Gauge Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Masaki Taniguchi
2. 発表標題 Local equivalence in instanton Floer theory
3. 学会等名 GEOMETRY & TOPOLOGY WORKSHOP TURKEY (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Masaki Taniguchi
2. 発表標題 Filtered instanton Floer homology and the homology cobordism group
3. 学会等名 Floer homology in low dimensional topology, Simons Center (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Masaki Taniguchi
2. 発表標題 Knotted 2-spheres in the 4-space and Yang-Mills gauge theory
3. 学会等名 The 16th East Asian Conference on Geometric Topology (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Masaki Taniguchi
2. 発表標題 Instanton Floer theory and local equivalence I
3. 学会等名 ハンドルセミナー21 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Masaki Taniguchi
2. 発表標題 Instanton Floer theory and local equivalence II
3. 学会等名 ハンドルセミナー21 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Masaki Taniguchi
2. 発表標題 Instanton Floer theory and local equivalence III
3. 学会等名 ハンドルセミナー21 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Masaki Taniguchi
2. 発表標題 Instanton Floer theory and local equivalence IV
3. 学会等名 ハンドルセミナー21 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Masaki Taniguchi
2. 発表標題 Instanton Floer theory and local equivalence V
3. 学会等名 ハンドルセミナー21 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Masaki Taniguchi
2. 発表標題 Instanton Floer theory and local equivalence VI
3. 学会等名 ハンドルセミナー21 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Masaki Taniguchi
2. 発表標題 Instanton Floer theory and local equivalence VII
3. 学会等名 ハンドルセミナー21 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Masaki Taniguchi
2. 発表標題 Codimension-1 embeddings of 3-manifolds and Chern-Simons functional
3. 学会等名 微分トポロジーセミナー, 京都大学 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Masaki Taniguchi
2. 発表標題 Seifert hypersurface of 2-knots and Chern-Simons functional
3. 学会等名 トポロジー金曜セミナー, 九州大学 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Masaki Taniguchi
2. 発表標題 Filtered instanton Floer homology and the homology cobordism group
3. 学会等名 Stanford Topology seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Masaki Taniguchi
2. 発表標題 Filtered instanton Floer homology and the 3-dimensional homology cobordism group
3. 学会等名 egensburg low-dimensional geometry and topology seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Masaki Taniguchi
2. 発表標題 auge theory on 4-manifolds with periodic ends
3. 学会等名 Gauge theory virtual (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Masaki Taniguchi
2. 発表標題 Gauge theory on 4-manifolds with periodic ends II,
3. 学会等名 Gauge theory virtual (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関