

令和 6 年 9 月 27 日現在

機関番号：32652

研究種目：国際共同研究加速基金（国際共同研究強化(A））

研究期間：2021～2023

課題番号：20KK0306

研究課題名（和文）レイノルズ数の大きいナビエ・ストークス方程式の解の計算機援用証明

研究課題名（英文）Computer-assisted solution verification for the Navier-Stokes equation with large Reynolds numbers

研究代表者

劉 雪峰 (Xuefeng, Liu)

東京女子大学・現代教養学部・教授

研究者番号：50571220

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 10,800,000円

渡航期間： 6ヶ月

研究成果の概要（和文）：この研究では、3次元空間内の流体の動きを新しい計算機援用証明法で解析しました。特に、レイノルズ数100以上の流れを検証するという難問を解決するために、新たな微分作用素の計算と評価方法を検討しました。研究代表者は2022年5月から12月までの間にドイツのM. Plum教授を訪問し、共同研究で高精度な固有値評価法を開発しました。また、研究経費を活用してヨーロッパやアメリカでの研究交流と研究集会の開催などを行い、研究者自身を含めて日本の計算機援用証明法の成果を国際的に発信しました。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究は、流体の動きを中心とした非線形偏微分方程式の解析に対して、精度保証付き数値計算の複数の手法を発展させ、この分野の研究を大きく推進しました。また、日本の研究者と海外の研究者との交流が大変不足している問題点に対して、本研究では、ドイツのM. Plum教授との共同研究、ヨーロッパやアメリカの多くの研究者への訪問、国際研究集会の開催を通じて、国際交流不足の状況を大きく改善することができたと考えています。

研究成果の概要（英文）：This research focuses on analyzing fluids in three-dimensional space using a new computer-assisted proof method. Generally, a higher Reynolds number causes difficulty in studying the involved eigenvalue problem. The research leader collaborated with Professor M. Plum in Germany to develop highly accurate eigenvalue evaluation methods and to verify flows with Reynolds numbers over 100. Additionally, research expenses were used to facilitate exchanges with researchers in Europe and the United States, thereby internationally promoting the achievements of Japan's research in the field of computer-assisted proof.

研究分野：数値解析

キーワード：ナビエ・ストークス方程式 計算機援用証明 固有値問題の厳密評価 精度保証付き数値計算 非線形偏微分方程式

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

## 1. 研究開始当初の背景

(1) 本研究は非線形偏微分方程式の一種であるナビエ・ストークス方程式の解の正則性の問題に対して、「精度保証付き数値計算」という新たな数値解析手法の使用を検討しています。一般的な3次元領域におけるナビエ・ストークス方程式は複雑すぎて厳密解を検討するのは極めて難しいため、対称性などの仮定の導入によって、単純化した問題が考えられています。例えば、1999年に Y. Watanabe, N. Yamamoto, M.T. Nakao は2次元正方領域における定常解の検証方法を提案しました。2004年には J.-R. Lahmann, M. Plum が1次元空間のナビエ・ストークス方程式である Orr-Sommerfeld 問題の不安定性を証明し、その後、2009年に Y. Watanabe, K. Nagatou, M. Plum, M. Nakao は Orr-Sommerfeld 問題の解の検証方法を提案しました。最近、カナダ・マギル大学の J.P. Lessard グループはトーラスの周期的流れの検証を検討しています。

(2) 既存の手法を3次元領域におけるナビエ・ストークス方程式に応用する場合、いくつかの難点が挙げられます。例えば、Divergence-free 条件の処理は問題の本質に関わり、厳密な誤差評価は極めて難しいです。近似解が Divergence-free 条件を厳密に満たさない場合、Korn 不等式に現れる定数の評価が必要であり、3次元領域の場合、Korn 不等式の定数評価はまだ未解決の問題です。また、ナビエ・ストークス方程式の解の検証のために、線形化したストークス方程式に現れる非自己共役偏微分作用素のノルム評価が要求されます。一般的に、微分作用素の固有値評価については、固有値の上界の評価は容易に得られますが、固有値の厳密な下界評価は難しい課題です。

## 2. 研究の目的

(1) 本研究では、劉がこれまで開発した「有限要素法を用いた固有値の厳密評価法」を拡張し、ナビエ・ストークス方程式の解の存在証明に必要となる非自己共役微分作用素のノルム評価の問題を解決し、レイノルズ数の大きい流れの解の存在証明方法を開発します。また、微分作用素の固有値問題の固有値関数の評価について、クラスター固有値にも適用できる誤差解析法を検討し、有限要素法の誤差評価の精密化を目指します。

## 3. 研究の方法

(1) レイノルズ数の大きい流れのシミュレーションを行う際、構造の複雑な流れの情報を捉えるために、より細かい領域の分割によって構成される高次元の離散化関数空間が必要となります。そのため、解の検証に関わる種々の計算方法の効率を極め、現実の計算機で実行可能な検証方法の開発が不可欠です。本研究では、ナビエ・ストークス方程式の線形化方程式に現れる非自己共役微分作用素のノルム評価の効率的な計算法に焦点を当て、新たな手法を導入して、計算量を抑えた安定な微分作用素のノルム評価方法を開発します。

(2) 本研究は「非自己共役作用素のノルム評価問題の新たな定式化」、「ストークス微分作用素の固有値問題に適用する Homotopy 法」、「固有関数の誤差解析と有限要素法の誤差評価の精密化」を焦点にして、問題の解決方法を提案します。

## 4. 研究成果

(1) まず、非自己共役作用素のノルム評価問題の新たな定式化についての研究成果を説明します。劉がこれまでに開発した固有値評価法は自己共役作用素に対して有用な方法であり、これまでに自己共役作用素となるラプラス作用素、重調和作用素、ストークス微分作用素の固有値問題を解決したことがあります。一方で、非自己共役作用素の場合、固有値の min-max 原理が成り立たないため、劉の方法は直接に利用できないことがあります。本研究では、重調和作用素の固有値問題に使用される鞍点式化の手法を利用して、非自己共役のストークス作用素の固有値問題を自己共役性のある鞍点式の固有値問題に帰着させる方法を提案しました。提案方法は Y 型の Rayleigh 商を使用することで、鞍点式の固有値問題の固有値に対して min-max 原理が成立するため、既存の固有値評価手法を使用して固有値の評価を得ました。この結果は日本応用数理学会 2022 年度年会[1]に発表されました。

(2) 次に、ストークス微分作用素の固有値問題の新規評価方法を説明します。現在、劉が提案した「非適合有限要素を用いた固有値評価方法」は固有値の厳密評価を提供できますが、使用された線形非適合有限要素の次数を高くするのは難しいため、3次元領域における固有値問題に適用する時、細かいメッシュ分割が必要となり、大規模な行列の固有値問題が現れ、計算の効率が低いという問題点があります。本研究では、M. Plum が提唱している Homotopy 法を拡張し、「部分領域ごとに逐次 Divergence-free 条件を適用する Homotopy 法」のアイデアを提案しました。この手法の初期段階で、「非適合有限要素を用いた固有値評価方法」または Hypercircle 法による軽い計算で大まかな固有値評価を得て、その後、Divergence-free 条件を満たす部分領域を逐次拡大し、目標固有値問題へと進行する過程での固有値の変動を追跡することで、目標固有値の厳密計算が可能となります。この方法では、これまでに使用した非適合有限要素空間に伴う大規模な行列の固有値計算を回避することができ、計算効率が飛躍的に向上することが可能です。

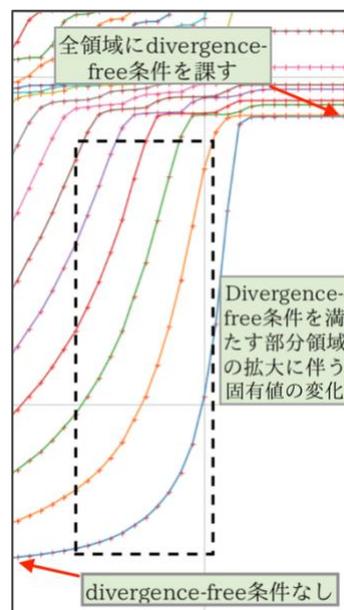


図 1: 新たな Homotopy

(3) 固有関数の解析と有限要素法の誤差評価の精密化に関する研究成果を説明します。固有関数の評価について、劉は既存の Birkhoff の方法や Davis-Kahan の定理を拡張し、クラスター固有値の場合にも適用できる固有関数の厳密解析法を提案しました。実際の固有値問題の設定によって、「Rayleigh quotient-based algorithm」、「Residual-based method」、「Projection-based algorithm」の三つのアルゴリズムを提案しました。この結果は[2][3]に発表されました。また、微分作用素の固有値と固有関数に対する厳密評価法の構築を実現し、スペクトル幾何学の分野に画期的な手法を導入してきました。近年、従来の純粋数学的証明法では解決が困難な問題に対する計算機援用証明の採用が多大な注目を受けています。特に、劉の方法を活用した三角形と四角形の固有値比に関する Ashbaugh-Benguria-Payne-Polya-Weinberge の予想の証明 (arXiv:2207.05814, 2022 年)や、固有値の節線に関する予想の反例(Dahne et al, 2021 年)はその明確な例です。劉はこれまでの研究で得た固有値と固有関数の厳密評価を活用し、スペクトル幾何学の研究分野におけるコア課題である微分作用素の固有関数の挙動を深く解析してきました。それにより、三角形領域においてすでに証明されている形状最適化問題 (Pólya-Szegő の予想の特別な場合) に対して計算機援用証明法を駆使して再評価し、さらに一般的な境界条件を持つ形状の最適化問題への答えを導き出しました[4]。また、補間作用素の最大値ノルム誤差評価[5]や境界値問題の局所誤差評価[6]に関する研究結果も国際トップ学術誌に発表されています。

参考文献：

1. 劉雪峰, 微分作用素の固有値と固有関数の厳密評価法の進展, 日本応用数理学会 2022 年度年会, 2022 年 9 月。
2. Liu, Xuefeng, and Tomáš Vejchodský. *Fully computable a posteriori error bounds for eigenfunctions*. Numerische Mathematik 152.1 (2022): 183-221.
3. Liu, Xuefeng, and Tomáš Vejchodský. *Projection-based guaranteed L2 error bounds for finite element approximations of Laplace eigenfunctions*. Journal of Computational and Applied Mathematics 429 (2023): 115164.
4. Endo, Ryoki, and Xuefeng Liu. *Shape optimization for the Laplacian eigenvalue over triangles and its application to interpolation error analysis*. Journal of Differential Equations 376 (2023): 750-772.
5. Galindo, Shirley Mae, Koichiro Ike, and Xuefeng Liu. *Error-constant estimation under the maximum norm for linear Lagrange interpolation*. Journal of Inequalities and Applications 2022.1 (2022): 109.
6. Nakano, Taiga, and Xuefeng Liu. *Guaranteed local error estimation for finite element solutions of boundary value problems*. Journal of Computational and Applied Mathematics 425 (2023): 115061.

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 6件/うち国際共著 3件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Liu Xuefeng, Nakao Mitsuhiro T., Oishi Shin'ichi	4. 巻 108
2. 論文標題 Computer-assisted proof for the stationary solution existence of the Navier-Stokes equation over 3D domains	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation	6. 最初と最後の頁 106223 ~ 106223
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.cnsns.2021.106223	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Liu Xuefeng, Vejchodsky Tomas	4. 巻 152
2. 論文標題 Fully computable a posteriori error bounds for eigenfunctions	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Numerische Mathematik	6. 最初と最後の頁 183 ~ 221
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00211-022-01304-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Galindo Shirley Mae, Ike Koichiro, Liu Xuefeng	4. 巻 2022
2. 論文標題 Error-constant estimation under the maximum norm for linear Lagrange interpolation	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Inequalities and Applications	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1186/s13660-022-02841-w	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Liu Xuefeng, Vejchodsky Tomas	4. 巻 429
2. 論文標題 Projection-based guaranteed L2 error bounds for finite element approximations of Laplace eigenfunctions	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Journal of Computational and Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 115164 ~ 115164
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.cam.2023.115164	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Nakano Taiga, Li Qin, Yue Meiling, Liu Xuefeng	4. 巻 -
2. 論文標題 Guaranteed Lower Eigenvalue Bounds for Steklov Operators Using Conforming Finite Element Methods	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Computational Methods in Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1515/cmam-2022-0218	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Nakano Taiga, Liu Xuefeng	4. 巻 425
2. 論文標題 Guaranteed local error estimation for finite element solutions of boundary value problems	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Journal of Computational and Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 115061 ~ 115061
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.cam.2023.115061	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計16件 (うち招待講演 2件 / うち国際学会 3件)

1. 発表者名 中野 泰河, 劉 雪峰
2. 発表標題 Laplace作用素の非斉次Neumann境界値問題の有限要素近似に対する定量的誤差評価
3. 学会等名 日本応用数理学会第19回研究部会連合発表会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 劉 雪峰
2. 発表標題 微分作用素の固有値の上下界評価: Kato's boundsへの再検討
3. 学会等名 日本応用数理学会第19回研究部会連合発表会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 遠藤 凌輝, 劉 雪峰
2. 発表標題 ラプラシアン の重複固有値に関する形状微分公式と多角形領域の幾何
3. 学会等名 日本応用数学会第19回研究部会連合発表会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 尾崎 克久, 劉 雪峰
2. 発表標題 浮動小数点数で表現される領域の境界上の節点の計算法
3. 学会等名 日本応用数学会第19回研究部会連合発表会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Xuefeng LIU
2. 発表標題 Rigorous eigenvalue estimation for the Stokes differential operators
3. 学会等名 9th International Conference on Computational Methods in Applied Mathematics (CMAM) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 劉 雪峰
2. 発表標題 微分作用素の固有値と固有関数の厳密評価法の進展
3. 学会等名 日本応用数学会2022年度年会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 中野 泰河, 劉 雪峰
2. 発表標題 Hypercircle法を用いた有限要素法解の局所誤差評価の改善
3. 学会等名 日本応用数学会2022年度年会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 遠藤 凌輝, 劉 雪峰
2. 発表標題 三角形領域におけるラプラス作用素の固有値問題と形状微分公式の厳密評価
3. 学会等名 日本応用数学会2022年度年会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Xuefeng LIU
2. 発表標題 Rigorous eigenvalue estimation to the Stokes equation and its application to solution verification for Navier-Stokes equation
3. 学会等名 International Conference on Eigenvalue Problems and Related Topics (Beijing) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 劉 雪峰, 和田 薫
2. 発表標題 板の振動に関わる重調和作用素の厳密な固有値評価
3. 学会等名 応用数学会年会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 ガリンド シェリーメイ, 劉 雪峰
2. 発表標題 Verified computation for optimization problems with maximum norm constraint condition
3. 学会等名 応用数理学会年会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 中野 泰河, 劉 雪峰
2. 発表標題 Helmholtz方程式の非斉次Neumann境界値問題に対する定量的な事後誤差評価
3. 学会等名 応用数理学会年会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 中野 泰河, 劉 雪峰
2. 発表標題 Poisson方程式の有限要素解に対する非一様メッシュによる局所誤差の収束挙動について
3. 学会等名 日本応用数理学会第18回研究部会連合発表会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 ガリンド シェリーメイ, 劉 雪峰
2. 発表標題 Maximum Norm Error Estimation for Boundary Value Problems
3. 学会等名 日本応用数理学会第18回研究部会連合発表会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 遠藤 凌輝, 劉 雪峰
2. 発表標題 多角形領域におけるDirichlet固有値問題の形状最適化問題
3. 学会等名 日本応用数理学会第18回研究部会連合発表会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Xuefeng LIU
2. 発表標題 Rigorous eigenvalue estimation of the Stokes differential operators and computer-assisted proof of the solution to the Naiver-Stokes equation
3. 学会等名 International Workshop on Reliable Computing and Computer-Assisted Proofs (ReCAP 2022) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

<p>プレスリリース1: 3次元領域における流れの計算機援用証明 - 数学の未解決問題へ挑む -  <a href="https://www.niigata-u.ac.jp/news/2022/103998/">https://www.niigata-u.ac.jp/news/2022/103998/</a>          プレスリリース2: ラプラス作用素の固有値に関する形状最適化問題を計算機援用証明により解決 - 太鼓の音と形状の関係性に迫る -  <a href="https://www.twcu.ac.jp/main/news/2023/1110_001.html">https://www.twcu.ac.jp/main/news/2023/1110_001.html</a>          プレスリリース3: ポアソン方程式の有限要素解に対する定量的な誤差評価手法の開発 - 高精度で信頼性のある数値解析に向けて -  <a href="https://www.niigata-u.ac.jp/news/2023/347937/">https://www.niigata-u.ac.jp/news/2023/347937/</a></p>
--

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
主たる渡航先の主たる海外共同研究者	Plum Michael	カールスルーエ工科大学・Department of Mathematics・教授	
	(Plum Michael)		

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会	開催年
Numerical methods for spectral problems: theory and applications (NMSP2023)	2023年～2023年

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
ドイツ	Karlsruhe Institute of Technology			
チェコ	Czech Academy of Sciences			
中国	Technology and Business University			