

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 5 月 22 日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(S)

研究期間：2009～2014

課題番号：21224001

研究課題名(和文) 複雑現象に挑む形態変動解析学の構築

研究課題名(英文) Development of Analysis on Evolving Pattern for Complicated Phenomena

研究代表者

儀我 美一 (Giga, Yoshikazu)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号：70144110

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 135,800,000円

研究成果の概要(和文)：結晶成長現象、流体運動等、自然科学の諸現象はしばしば非線形偏微分方程式で記述されま
す。そこに現れる複雑な形状や形態の変化を厳密に数学的現象ととらえ、粘性解析、変分解析、実解析等を進展させて
解析を行いました。形状や形態の変動では、変動原理が単純で初期形状が滑らかであったとしても、時間を経ると形状
が尖って特異点を持つことがよくあります。そこで微分できない関数を微分方程式の「解」ととらえて解析するため
、適切に解概念を拡張する必要が生じます。ここでは結晶成長や流体運動現象等に現れる拡散型方程式について、新た
に解概念を導出し、解の存在性や挙動解析を行いました。また離散と連続モデルの関係を調べました。

研究成果の概要(英文)：Various phenomena in natural sciences, for example, crystal growth phenomena and
fluid motion, etc. are often modeled by nonlinear partial differential equations. We describe evolution
of complex shapes and patterns observed there as mathematical phenomena and analyze them by developing
the theory of viscosity solutions, variational analysis and real analysis, etc. In evolution of shapes
and patterns even if the evolution law is simple and the initial shape is smooth, the solution often
develops singularities by forming corners after some time. It is necessary to extend notions of a
solution in a suitable way to interpret non-differentiable functions as a solution of differential
equations for further analysis. In this project we introduce several new notions of solutions of
diffusion equations describing for example crystal growth or fluid motion. We prove the existence of such
solutions and analyze their behavior. Moreover, we study relation between discrete and continuous models.

研究分野：数物系科学・数学・数学解析

キーワード：非線形現象 非線形偏微分方程式 粘性解 平均曲率流方程式 全変動流方程式

1. 研究開始当初の背景

形状や構造の変動を正確に捉え解析することは、数学分野だけではなく、科学技術全般の複雑な現象を理解し、解明するために重要です。複雑な結晶がどのように形成されてきたか、といった自然科学的な問題から複雑な画像からどのようにノイズを除くとよいかといった工学的な問題まで、形態変動に関する問題はさまざまです。

2. 研究の目的

本研究では図形やパターンの変動を記述する重要な非線形偏微分方程式に対し、必ずしも微分可能とは限らない解の複雑な挙動や性質を解明すると共に、さまざまな数学モデルとの関係を明らかにするために、粘性解析、変分解析、漸近解析、実解析、確率解析を深化させます。また結晶成長分野など関連分野への応用を目指すだけでなく、複雑な現象を図形の変動と捉え、従来つながりのなかったとされる分野への応用の可能性を探索します。

3. 研究の方法

個人研究、海外共同研究者や研究協力者との共同研究が主体です。このため国際ワークショップ、学際的国際会議やチュートリアルセミナーを開催し研究者ネットワークを強化しました。これまでに開催した主なものは以下のとおりです。

- (i) Minisemester on evolution of interfaces 2010 (平成 22 年度)
- (ii) Front propagation, biological problems and related topics: viscosity solution methods for asymptotic analysis (平成 23 年度)
- (iii) Mathematical Aspect of Image Processing and Computer Vision (平成 21 年度、22 年度、23 年度)
- (iv) 表面・界面ダイナミクスの数理、(平成 23 年度)
- (v) 致死性不整脈の機序の解明、(平成 23 年度)
- (vi) 表面・界面ダイナミクスの数理、(平成 24 年度)
- (vii) Variational Methods for Evolving Objects (平成 24 年度)
- (viii) 心臓と血流の数理 (平成 24 年度)
- (ix) Geophysical Fluid Dynamics, MFO, Germany (平成 24 年度)
- (x) Interfaces and Free Boundaries: Analysis, Control and Simulation, MFO, Germany (平成 24 年度)
- (xi) 表面・界面ダイナミクスの数理、(平成 25 年度)
- (xii) The 6th Pacific Rim Conference on Mathematics (平成 25 年度)

4. 研究成果

大きく 5 つのテーマに分けて述べます。

(1) 形態変動解析に適した新たな解概念の

定式化: 非線形偏微分方程式の「解」はたとえ時刻ゼロのとき滑らかであっても、やがて尖って特異点を持つことがあります。微分できない関数を微分方程式の「解」と理解するためには、解概念の拡張が必要になります。また方程式自体に特異性があり通常の意味では何をもって「解」としてよいかわからないこともあります。結晶成長現象や画像処理を記述するさまざまな方程式についてこの問題を検討し、新たな解概念を導出し、またその解の性質を解析しました。以下より具体的に述べます。([] 内は雑誌論文の番号)

ファセット分裂を許す粘性解概念の構築:

結晶成長においては、しばしばファセットと呼ばれる平らな面が現れます。駆動力が空間的に非一様な場合、曲線が関数のグラフで与えられている場合の特異拡散方程式の通常解の概念を拡張し、粘性解理論を構築しました。この解について比較定理、存在定理を確立しました [1]。ファセット分裂も含めた十分広いクラスでの解概念は全くなかったため、初めての統一的一般論といえます。また駆動力が空間的に一様な場合でも、高次元で曲面が多変数関数のグラフで与えられた場合にも、特異拡散方程式の解の概念の拡張に成功しました [3]。曲線の運動と異なり、高次元の場合、駆動力の空間的に一様であってもファセット分裂が起こり得ますので、新たなアイデアが必要でした。

駆動力付平均曲率流方程式のヴァリフォルド解の概念の構築:

金属の焼きなまし時の粒界の動きを記述する平均曲率流方程式については、等高面法による広義解の概念はよく知られています。一方で、変分原理に基づいた広義解であるヴァリフォルド解は、その存在や正則性は古くから研究されてきましたが、その鍵となる Brakke (1972) の論文は理解不能な記述も多く、実際に何が証明されたのか不明であるという状態でした。本研究では、反応拡散方程式である Allen-Cahn 方程式の拡散界面解の極限としてヴァリフォルド解を構築することに、駆動力付の場合も含めて成功しました。その際、鍵となる単調性公式を確立しました。これは、解の正則性を「ふくらまし法」で示すのに重要な鍵となっています。この成果はこの分野の教科書の結果になりました [4], [5]。

4 階の全変動流方程式について解概念の構築:

半導体結晶表面の変化の記述や、画像処理において、しばしば 4 階の全変動流方程式や、その仲間である特異な表面拡散流方程式が用いられます。これらの方程式について、発散型の場合の解概念を明確にしました。その上で、周期境界条件の場合、この全変動流型方程式の解のグラフは有限時間内に平らになってパターンが消える有限消滅性を証明しました [23]。比較原理のない 4 階方程式では初めての画期的成果で、形態変動解析において重要な基礎理論です。また、初期形状

が連続でも瞬間的に不連続になるという、2階問題では起こらない珍しい現象も発見しました [33]。

(2) 解の挙動の解析: 解の存在や一意性がわかると、次に解の挙動が課題となります。形態変動の解析としては例えば時間無限大で一定の形状や形態になるかどうかは大きな問題です。このような問題に対しても本研究は大きな貢献をしております。例えばハミルトン・ヤコビ方程式の時間無限大での解の漸近挙動について、従来全く取り扱われていなかった非強圧的なハミルトニアン [2], [14] や、ノイマン条件を境界条件とした問題 [16], [28] に対して、その時間無限大での漸近挙動の特徴づけに成功しています。粘性解理論といった数学解析の進展だけではなく、結晶成長現象解明にも重要な結果です。

(3) 離散モデルと連続モデルの相互関係の解析: 例えば、平均曲率流方程式の時間離散的微分ゲームや時間離散の変分スキームによる近似解の収束を境界条件付の場合や非等方的な場合等、従来扱われていなかった条件下で証明しました。さらに、時間離散化問題や大規模相互作用系である多体粒子系問題の極限を解析しました。

時間離散微分ゲームおよび時間離散的分的アプローチによる平均曲率流方程式の解の近似: 平均曲率流方程式 (の等高面方程式) の解は確率微分ゲームの価関数として表現できますが、時間離散微分ゲームの価関数によって近似することができます。このような結果を境界条件付の場合にも拡張しました [41]。また、時間離散的分的アプローチによる近似法についても、従来扱われていない非等方、非有界といった一般的な設定で近似解の真の解への収束を証明しました [13]。

大規模相互作用系のスケール極限の特徴づけ: さまざまなランダム系のスケール極限を考察しました。例えば、2次元ヤング図形集合に適当なランダムな構造を入れ、面積を増大させるとともにスケールを縮小して見直せば、ヤング図形の境界は Vershik 曲線と呼ばれる一定の形に近づきます。この問題に対応する時間発展モデルを構成し、その時空のスケール変換を考察しました。極限において得られる曲線の運動法則は非線形偏微分方程式によって記述できることを示しました。その定常解は Vershik 曲線に他ならないことを示しました [11], [37]。

(4) 次元の効果の解析: 3次元非圧縮性粘性流体の渦度方向が連続ならば、渦度自体がいくら大きくても流れに特異点が生じないことを、2次元流への帰着により示しました [22]。渦度方向があまり変わらないと2次元的になるという物理的直観を反映した、自然な証明です。そこで用いた「ふくらまし法」の精神を線形化方程式であるストークス方程式に応用し、30年間未解決の「ストークス半群の有界関数の空間での解析性」を一般的な領域で証明することに成功しました [8]。

(5) 科学技術諸分野からの問題探索: 結晶成長分野を中心にこれまで定式化できた問題について顕著な成果を得ました。例えば結晶表面で強さが異なる複数の螺旋転位が衝突を繰り返しながら表面が成長する現象を正確に捉えることは重要です。従来の等高面法ではこれらの複雑な状況を計算すること自体不可能でした。本研究で開発した被覆空間上での等高面法に転位の加法的表現を用いた初期値構成法を確立することにより、一般の初期形状からの数値計算が可能になりました。結晶成長学に対しても重要な貢献です。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

(雑誌論文)(計 91 件)

1. M.-H. Giga, Y. Giga and P. Rybka, A comparison principle for singular diffusion equations with spatially inhomogeneous driving force for graphs, Arch. Ration. Mech. Anal. **211** (2014), Issue 2, 419–453. Erratum: 212 (2014), 707. 査読有
DOI: 10.1007/s00205-013-0676-y
2. Y. Giga, Q. Liu and H. Mitake, Singular Neumann problems and large-time behavior of solutions of noncoercive Hamilton-Jacobi equations, Trans. Amer. Math. Soc. **366** (2014) no. 4, 1905–1941. 査読有
DOI:10.1090/S0002-9947-2013-05905-3
3. M.-H. Giga, Y. Giga and N. Pozar, Periodic total variation flow of non-divergence type in R^n , J. Math. Pures Appl. **102** (2014) 203–233. 査読有
DOI: 10.1016/j.matpur.2013.11.007
4. Y. Tonegawa, A second derivative Hölder estimate for weak mean curvature flow, Advances in Calculus of Variations **7** (2014), no. 1, 91–138. 査読有
DOI: 10.1515/acv-2013-0104
5. K. Kasai and Y. Tonegawa, A general regularity theory for weak mean curvature flow, Calc. Var. Partial Differential Equations **50**, (2014) no. 1, 1–68. 査読有
DOI: 10.1007/s00526-013-0626-4
6. M.-H. Giga, Y. Giga, T. Ohtsuka and N. Umeda, On behavior of signs for the heat equation and a diffusion method for data separation, Comm. Pure Appl. Anal. **12** Issue 5 (2013), 2277–2296. 査読有
DOI: 10.3934/cpaa.2013.12.2277
7. Y. Giga and N. Hamamuki, Hamilton-Jacobi equations with discontinuous source terms, Commun. Partial Differ-

- ential Equations **38** (2013), 199–243. 査読有
DOI: 10.1080/03605302.2012.739671
8. K. Abe and Y. Giga, Analyticity of the Stokes semigroup in spaces of bounded functions, *Acta Mathematica* **211** (2013), no. 1, 1–46. 査読有
DOI: 10.1007/s11511-013-0098-6
 9. G. Barles, H. Ishii, H. Mitake, A new PDE approach to the large time asymptotics of solutions of Hamilton-Jacobi equations. *Bull. Math. Sci.* **3** (2013), no. 3, 363–388. 査読有
DOI: 10.1007/s13373-013-0036-0
 10. H. Ishii, A short introduction to viscosity solutions and the large time behavior of solutions of Hamilton-Jacobi equations: approximations, numerical analysis and applications, 111–249, *Lecture Notes in Math.*, **2074**, Springer, Heidelberg, 2013. 査読有
DOI: 10.1007/978-3-642-36433-4_3
 11. T. Funaki, M. Sasada, M. Sauer and B. Xie, Fluctuations in an evolutionary model of two-dimensional Young diagrams, *Stoch. Proc. Appl.*, **123** (2013), 1229–1275. 査読有
DOI: 10.1016/j.spa.2012.12.005
 12. S. Jimbo, Hadamard variation for electromagnetic frequencies, Geometric properties for parabolic and elliptic, PDE's, R. Magnanini et al (eds), *INdAM series 2* Springer (2013), 179–200. 査読有
DOI: 10.1007/978-88-470-2841-8_12
 13. T. Eto, Y. Giga and K. Ishii, An area-minimizing scheme for anisotropic mean-curvature flow, *Advances in Differential Equations*, **17**, Numbers 11–12 (2012), 1031–1084. 査読有
<http://projecteuclid.org/euclid.ade/1355702938>
 14. Y. Giga, Q. Liu and H. Mitake, Large-time asymptotics for one-dimensional Dirichlet problems for Hamilton-Jacobi equations with noncoercive Hamiltonians, *J. Differential Equations*, **252** (2012), no. 2, 1263 - 1282. 査読有
DOI: 10.1016/j.jde.2011.10.010
 15. H. Ishii and P. E. Souganidis, A pde approach to small stochastic perturbations of Hamiltonian flows. *J. Differential Equations* **252** (2012), no. 2, 1748–1775. 査読有
DOI: 10.1016/j.jde.2011.08.036
 16. G. Barles, H. Ishii and H. Mitake, On the large time behavior of solutions of Hamilton-Jacobi equations associated with nonlinear boundary conditions. *Arch. Ration. Mech. Anal.* **204** (2012), no. 2, 515–558. 査読有
DOI: 10.1007/s00205-011-0484-1
 17. Y. Fujita and H. Ishii, Uniqueness sets for minimization formulas. *Differential Integral Equations* **25** (2012), no. 5–6, 579–588. 査読有
<http://projecteuclid.org/euclid.die/1356012681>
 18. N. Ikoma and H. Ishii, Eigenvalue problem for fully nonlinear second-order elliptic PDE on balls. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **29** (2012), no. 5, 783–812. 査読有
DOI: 10.1016/j.na.2012.07.029
 19. T. Funaki, Hydrodynamic limit for the $\nabla\varphi$ interface model via two-scale approach, In: *Probability in Complex Physical Systems: In Honour of Erwin Bolthausen and Jürgen Gärtner*, Springer, 2012, 463–490. 査読有
DOI: 10.1007/978-3-642-23811-6_19
 20. T. Funaki, H. Izuhara, M. Mimura and C. Urabe, A link between microscopic and macroscopic models of self-organized aggregation, *Networks and Heterogeneous Media*, **7** (2012), 705–740. 査読有
DOI: 10.3934/nhm.2012.7.705
 21. S. Jimbo, A. Morassi, G. Nakamura, K. Shirota, A non-destructive method for damage detection in steel-concrete structures based on finite eigendata, *Inverse Problems in Science and Engineering*, **20** (2012), 233 - 270. 査読有
DOI: 10.1080/17415977.2011.605884
 22. Y. Giga and H. Miura, On vorticity directions near singularities for the Navier-Stokes flows with infinite energy, *Comm. Math. Phys.* **303** (2011), no. 2, 289 - 300. 査読有
DOI: 10.1007/s00220-011-1197-x
 23. Y. Giga and R. V. Kohn, Scale-invariant extinction time estimates for some singular diffusion equations, *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **30** (2011), no. 2, 509 - 535. 査読有
DOI: 10.3934/dcds.2011.30.509
 24. Y. Giga, N. Mizoguchi and T. Senba, Asymptotic behavior of type I blowup solutions to a parabolic-elliptic system of drift-diffusion type, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **201** (2011), no. 2, 549 - 573. 査読有
DOI: 10.1007/s00205-010-0394-7
 25. Y. Giga, A. Mahalov and T. Yoneda, On a bound for amplitudes of Navier-Stokes flow with almost periodic initial data, *J. Math. Fluid Mech.*, **13** (2011),

- no. 3, 459 - 467. 査読有
DOI: 10.1007/s00021-010-0030-1
26. Y. Giga and J. Saal, L^1 -maximal regularity for the Laplacian and applications, *Discrete Contin. Dyn. Syst. supplement*, Volume **2011** (2011), 495 - 504. 査読有
DOI: 10.3934/proc.2011.2011.495
 27. Y. Giga, Y. Seki and N. Umeda, On a decay rate of quenching profile at space infinity for axisymmetric mean curvature flow, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **29** (2011), 1463 - 1470. 査読有
DOI: 10.3934/dcds.2011.29.1463
 28. H. Ishii, Long-time asymptotic solutions of convex Hamilton-Jacobi equations with Neumann type boundary conditions, *Calc. Var. Partial Differential Equations* **42** (2011), no. 1 - 2, 189 - 209. 査読有
DOI: 10.1007/s00526-010-0385-4
 29. H. Ishii, Weak KAM aspects of convex Hamilton-Jacobi equations with Neumann type boundary conditions, *J. Math. Pures Appl.* (9) **95** (2011), no. 1, 99 - 135. 査読有
DOI: 10.1016/j.matpur.2010.10.006
 30. Y. Tonegawa and N. Wickramasekera, Stable phase interfaces in the van der Waals-Cahn-Hilliard theory, accepted for publication in *Journal für reine und angewandte Mathematik*. 査読有
DOI: 10.1515/CRELLE.2011.134
 31. O. Y. Imanuvilov, G. Uhlmann and M. Yamamoto, Determination of second-order elliptic operators in two dimensions from partial Cauchy data, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **108** (2011), no. 2, 467 - 472. 査読有
DOI: 10.1073/pnas.1011681107
 32. Y. Giga, P. Górka and P. Rybka, Nonlocal spatially inhomogeneous Hamilton-Jacobi equation with unusual free boundary, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **26** (2010), 493 - 519. 査読有
DOI: 10.3934/dcds.2010.26.493
 33. M.-H. Giga and Y. Giga, Very singular diffusion equations - second and fourth order problems, *Japanese J. Ind. Appl. Math.*, **27** (2010), 323 - 345. 査読有
DOI: 10.1007/s13160-010-0020-y
 34. H. Ishii and Y. Matsumura, Non-local Hamilton-Jacobi equations arising in dislocation dynamics, *Z. Anal. Anwend.* **29** (2010), no. 3, 309 - 350. 査読有
DOI: 10.4171/ZAA/1411
 35. H. Ishii and G. Nakamura, A class of integral equations and approximation of p -Laplace equations, *Calc. Var. Partial Differential Equations* **37** (2010), no. 3 - 4, 485 - 522. 査読有
DOI: 10.1007/s00526-009-0274-x
 36. H. Ishii, Asymptotic solutions of Hamilton-Jacobi equations for large time and related topics. ICIAM 07 - 6th International Congress on Industrial and Applied Mathematics, Eur. Math. Soc., Zürich (2009), 193 - 217. 査読有
DOI: 10.4171/056-1/10
 37. T. Funaki and M. Sasada, Hydrodynamic limit for an evolutionary model of two-dimensional Young diagrams, *Comm. Math. Phys.*, **299** (2010), 335 - 363. 査読有
DOI: 10.1007/s00220-010-1082-z
 38. T. Funaki and T. Otake, Scaling limits for weakly pinned random walks with two large deviation minimizers, *J. Math. Soc. Japan*, **62** (2010), 1005 - 1041. 査読有
DOI: 10.2969/jmsj/06231005
 39. C. Liu, N. Sato and Y. Tonegawa, On the existence of mean curvature flow with transport term, *Interfaces and Free Boundaries*, **12** (2010), no. 2, 251 - 277. 査読有
DOI: 10.4171/IFB/234
 40. Y. Giga and P. Rybka, Facet bending driven by the planar crystalline curvature with a generic nonuniform forcing term, *J. Differential Equations*, **246** (2009), 2264 - 2303. 査読有
DOI: 10.1016/j.jde.2009.01.009
 41. Y. Giga and Q. Liu, A billiard-based game interpretation of the Neumann problem for the curve shortening equation, *Adv. Diff. Eq.* **14** (2009), 201 - 240. 査読有
<http://projecteuclid.org/euclid.ade/1355867265>
 42. Y. Giga, Y. Seki and N. Umeda, Mean curvature flow closes open ends of noncompact surfaces of rotation, *Comm. in Partial Differential Equations*, **34** (2009), 1508 - 1529. 査読有
DOI: 10.1080/03605300903296926
 43. H. Ishii and H. Mitake, Two remarks on periodic solutions of Hamilton-Jacobi equations. Recent progress on reaction-diffusion systems and viscosity solutions, *World Sci. Publ., Hackensack, NJ* (2009), 97 - 119. 査読有
DOI: 10.1142/9789812834744_0005
- [学会発表](計 140 件)
1. Y. Giga, On a level-set crystalline curvature flow of surfaces, *Mathe-*

- mathematics at the Interface of Partial Differential Equations, the Calculus of Variations, and Materials Science, 2014年5月21日 - 23日, Institute for Mathematics and its Applications, Minneapolis, USA, 5月23日(招待講演)
2. Y. Giga, Evolution equations with very singular diffusivity I, II, III, IV, Theme Semester on Game Theory and PDEs, 2013年4月29日 - 5月2日, Pittsburgh, USA (連続講演)
 3. Y. Giga, Very singular diffusion equations: second and fourth order models for crystal growth phenomena, Free Boundary Problems 2012, 2012年6月11日 - 15日, Chiemsee, Germany, 6月14日(基調講演)
 4. Y. Giga, A few topic on Hamilton-Jacobi equations arising from the theory of crystal growth, International Congress on Industrial and Applied Mathematics (ICIAM), 2011年7月18日 - 22日, Vancouver, Canada, 7月18日(招待講演)
 5. Y. Giga, Scale-invariant extinction time estimates for some singular diffusion equations, 4th Euro-Japanese Workshop on Blow-up, 2010年9月6日 - 10日, Lorentz Center, Leiden, the Netherlands, 9月6日(招待講演)
 6. Y. Giga, Singular diffusion equations with nonuniform driving force, Workshop on New Connections Between Differential and Random Turn Games, PDE's and Image Processing, 2009年7月27日 - 31日, University of British Columbia, Vancouver, Canada, 7月28日(招待講演)

〔図書〕(計1件)

1. M.-H. Giga, Y. Giga and J. Saal, Nonlinear Partial Differential Equations - Asymptotic Behavior of Solutions and Self-Similar Solutions, Birkhäuser (2010), xviii+294pp. 査読有

〔その他〕

ホームページ

http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~labgiga/kiban-j/kiban-j_hp.html

新聞掲載

1. 「秋の褒章」毎日新聞 P. 23, 平成22年11月2日
2. 「秋の紫綬褒章」学内広報, No. 1407, P. 8, 平成22年12月17日, 東京大学広報室
3. 「国際会議関係支援続々と」時計台前から, Vol. 74, P. 9, 平成23年10月, 公益財団法人札幌国際プラザ

4. 「数理解析学」東京大学新聞, P.3, 平成24年4月3日

6. 研究組織

(1)研究代表者

儀我 美一 (GIGA, Yoshikazu)
 東京大学・大学院数理科学研究科・教授
 研究者番号: 70144110

(2)研究分担者

山本 昌宏 (YAMAMOTO, Masahiro)
 東京大学・大学院数理科学研究科・教授
 研究者番号: 50182647

松井 伸也 (MATSUI, Shin'ya)
 北海道情報大学・情報メディア学部・教授
 研究者番号: 50219367

舟木 直久 (FUNAKI, Tadahisa)
 東京大学・大学院数理科学研究科・教授
 研究者番号: 60112174

石井 仁司 (ISHII, Hitoshi)
 早稲田大学・教育・総合科学学術院・教授
 研究者番号: 70102887

神保 秀一 (JIMBO, Shuichi)
 北海道大学・大学院理学研究院数学部門・教授
 研究者番号: 80201565

利根川 吉廣 (TONEGAWA, Yoshihiro)
 北海道大学・大学院理学研究院数学部門・教授
 研究者番号: 80296748

(3)連携研究者

西川 貴雄 (NISHIKAWA, Takao)
 日本大学・理工学部数学科・准教授
 研究者番号: 10386005

(4)研究協力者

阿部 健 (ABE, Ken)
 石井 克幸 (ISHII, Katsuyuki)
 梅田 典晃 (UMEDA, Noriaki)
 江藤 徳宏 (ETO, Tokuhiro)
 大塚 岳 (OHTSUKA, Takeshi)
 儀我 美保 (GIGA, Mi-Ho)
 関 行宏 (SEKI, Yukihiro)
 浜向 直 (HAMAMUKI, Nao)
 ポジャール, ノルベルト (POZAR, Norbert)
 三浦 英之 (MIURA, Hideyuki)
 三竹 大寿 (MITAKE, Hiroyoshi)
 米田 剛 (YONEDA, Tsuyoshi)
 柳 青 (LIU, Qing)