

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 9 日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(A)

研究期間：2009～2013

課題番号：21244003

研究課題名(和文) AdS/CFT対応とGIT安定性

研究課題名(英文) AdS/CFT correspondence and GIT stability

研究代表者

二木 昭人(Futaki, Akito)

東京大学・数理(科)学研究科(研究院)・教授

研究者番号：90143247

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 24,300,000円、(間接経費) 7,290,000円

研究成果の概要(和文)：トーリック・佐々木アインシュタイン計量の存在を証明し、その応用として、トーリック・ファノ多様体の標準束上にリッチ流の永遠解を構成した。離散的でない自己同型群を持つ偏極多様体には漸近的Chow不安定であるための障害となる積分不変量が構成できることを示した。これを用いて、トーリック・ケーラー・アインシュタイン多様体で、漸近的Chow不安定な例が構成できることがわかった。自己同型群が離散的な場合はそのような例は存在しないことが S.K.Donaldson によって示されていた。コンパクト多様体上の縮小勾配リッチソリトンの直径を普遍定数を用いて下から評価することに成功した。

研究成果の概要(英文)：A general existence result of toric Sasaki-Einstein metrics was established. As its application, an eternal solution of Kaehler Ricci flow was constructed on the canonical line bundle of toric Fano Manifolds.

On polarized manifolds with non-discrete automorphisms, it is shown that there are integral invariants which obstruct asymptotic Chow semi-stability. Using them it is possible to show the existence of a toric Fano Kaehler-Einstein manifold which is asymptotically unstable. It has been shown by S.K.Donaldson that a polarized manifolds with constant scalar curvature and with discrete automorphisms is asymptotically Chow-stable.

A universal lower diameter bound for compact shrinking Ricci solitons was obtained.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：アインシュタイン計量 ケーラー多様体 佐々木多様体 Fano多様体 平均曲率流 リッチ・ソリトン  
自己相似解

## 1. 研究開始当初の背景

AdS/CFT 対応とは弦理論におけるある種の双対性である。この双対性は重力とゲージ理論という全く違うように見える理論の等価性を主張するものである。一般的言い方では、低次元の佐々木・アインシュタイン多様体の幾何が superconformal field theory と等価であると主張する。従って前者の性質が後者の性質に反映し、また後者の性質は前者の性質に反映する。AdS/CFT 対応の一つの具体的主張は次の予想が正しいという主張である。予想は AdS5 を 5 次元反ドジッター空間とし、 $S$  を 5 次元佐々木・アインシュタイン多様体とすると AdS5  $\times$   $S$  上の type IIB 超弦理論は、4 次元の  $N = 1$  超対称 quiver ゲージ理論と等価である、というものである。以上の研究の流れからわかるように佐々木・アインシュタイン計量の存在問題は AdS/CFT 対応の研究の進展に大きな役割を果たす。

## 2. 研究の目的

本研究課題の目的は、理論物理における AdS/CFT 対応の研究の数学的基礎付けをゆるぎない形で与えることである。当該研究者はこれまで小野肇, Guofang Wang との共同研究で高さ一定のトーリック・ダイアグラムから作られる佐々木多様体は佐々木・アインシュタイン計量を持つことを証明した。したがって AdS/CFT 対応はトーリックの場合は、トーリック・ダイアグラムという組み合わせ的データと籠 (quiver) との対応を与えることに帰着される。この研究課題が目指すものはこのような数学的な土台を築くことである。一方, regular な佐々木多様体に佐々木・アインシュタイン計量を与える問題は Fano orbifold にケーラー・アインシュタイン計量を与える問題とまったく同じになる。この問題はこれまで当該研究者が研究してきたテーマそのものである。すなわち, このような問題は, ケーラー・アインシュタイン計量を持つ Fano 多様体を幾何学的不変式論 (GIT) の意味の安定性で特徴づけられると予想されている。この方向の研究も並行して進めることも目的とする。

## 3. 研究の方法

本研究は複素代数幾何, 複素解析, リーマ

ン幾何, シンプレクティック幾何など多岐にわたる分野が関連するため, 他分野の研究者との交流を必要とする。そのため, 国内外の研究集会への参加, 講演を通して研究交流を行った。また研究室の大学院生も国内の研究集会に多数参加した。また, 国内外の研究者を招いて以下のような研究集会を開催した。

平成 21 年度は第 15 回複素幾何シンポジウムを菅平高原において開催した。この研究集会は大阪大学・満洲俊樹, 名古屋大学・小林亮一, 東北大学板・東重稔と共催する集会である。21 年度は Weiyong He, S.K.Yeung 他, 複素幾何の研究者を招いて, 講演, 討論を行った。また, 第 5 回日中幾何学研究集会を沖縄 OIST で開催した。この研究集会は日本と中国で隔年に開催する研究集会である。日本側の組織委員は当該研究者の他, 東北大学・宮岡礼子, 福岡大学・成慶明, 大阪大学・満洲俊樹などである。Gang Tian, Xiping Zhu らが参加し, 講演, 討論を行った。

平成 22 年度は第 16 回複素幾何シンポジウムを菅平高原において開催した。22 年度は P. Eyssidieux, D. Popovici 他, 複素幾何の研究者を招いて, 講演, 討論を行った。また, 第 5 回 Pacific Rim Complex Geometry Conference を名古屋大学, 伊勢志摩で開催した。この研究集会は日本, 中国, 韓国で毎年開催して, 22 年度は日本開催の順番であった。Gábor Székelyhidi, Valentino Tosatti らが参加し, 講演, 討論を行った。

平成 23 年度は第 17 回複素幾何シンポジウムを菅平高原において開催した。23 年度は Changzheng Li, Siu-Cheong Lau 他, 複素幾何の研究者を招いて, 講演, 討論を行った。また, 第 7 回日中幾何学研究集会を東京工業大学, 河口湖で開催した。この研究集会は日本と中国で隔年に開催する研究集会である。日本側の組織委員は当該研究者の他, 東北大学・宮岡礼子, 福岡大学・成慶明, 大阪大学・満洲俊樹などである。Gang Tian, 深谷賢治ら参加し, 講演, 討論を行った。

平成 24 年度は第 7 回 Pacific Rim Complex Geometry Conference を京都大学で開催した。京都大学・吉川謙一, 大阪大学・満洲俊樹などと共同で開催した。日中韓の他, 欧米からも招待し, 合計 17 人が講演し, 討論を行った。また, 第 18 回複素幾何シンポジウムを菅平高原で開催した。

## 4. 研究成果

(1) 高さ一定のトーリック・ダイアグラムから作られる佐々木多様体は佐々木・アインシュタイン計量を持つことを証明した小野肇, Guofang Wang との共著論文を Journal of Differential Geometry から 2009 年に出版した。トーリック佐々木・アインシュタイン多様体の錐多様体は Ricci 平坦なトーリック・ケーラー錐である。この内部構造として色々な幾何構造を構成することは, トーリック

ク佐々木・アインシュタイン多様体の錐多様体の理解を深める上で有益である. 曲率に関する幾何構造を構成する一つ的手段として cohomogeneity one 多様体上で常微分方程式に帰着する方法がある. 佐々木・アインシュタイン多様体の錐の場合, ほぼ同様の手法が使えることがわかる. これはモーメント写像を用いることにより, 構成を概念的に明確化できる. その一つの結果として, トーリック Fano 多様体の標準直線束の冪においてリッチ流の永遠解が存在することを Mutao Wang との共同研究で証明した.

(2) 2001年に S. Donaldson は自己同型群が離散的な偏極多様体が, スカラー曲率一定ケーラー計量を持つならば漸近的 Chow 半安定であることを証明した. その後満洲俊樹は自己同型群が離散的でないなら漸近的 Chow 安定性の障害があることを示し, 更にこの障害が消えるような偏極多様体の場合, スカラー曲率一定ケーラー計量が存在するならば漸近的 Chow 半安定であることを証明した. その後, スカラー曲率一定ケーラー計量が存在するならば満洲の障害は消えるのではないかという問題が提起された. 当該研究者は満洲の障害は次元と同じ個数のある積分不変量が消えることと満洲の障害が消えることは同値であることを示した. 更に小野肇と佐野友二との共同研究で, これらの積分不変量はヒルベルトシリーズの微分を計算することにより得られるを示した. これらの結果から, スカラー曲率一定ケーラー計量が存在するならば満洲の障害は消えるのではないかという問題は, 次の Batyrev-Selivanova の問題が正しいかが鍵となることがわかった. 二木不変量が消えるトーリック Fano 多様体は対称か? ここにトーリック Fano 多様体は対称とは, 正則ベクトル場全体のなすリー環の指標で, ワイル群の作用で不変なものは 0 に限るときをいう. これの反例が Nill-Paffenholz により与えられた. これに対するヒルベルトシリーズの微分の応用として, スカラー曲率一定ケーラー計量が存在するが漸近的 Chow 半安定でないトーリック Fano 多様体の例が存在することが分かった.

(3) Fano 多様体においては, 乗数イデアル層と二木不変量との関係を明示的に表すことができることを, 佐野友二との共同研究で示した.

(4) コンパクト多様体上の縮小勾配

リッチソリトンの直径を与えることに佐野友二との共同研究で成功した.

(5) リッチ流の自己相似解であるリッチ・ソリトンの研究と並行して, 平均曲率流の自己相似解の錐多様体での発生について, Huisken らの先行結果を拡張した.

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者, 研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計10件)

二木昭人, Einstein 計量と GIT 安定性 II, 日本数学会誌「数学」, 査読有り, 64巻(2012), 113-130.

A. Futaki, Asymptotic Chow polystability in geometry, Fifth International Congress of Chinese Mathematicians. Part 1, 2, 139--153, AMS/IP Stud. Adv. Math., 査読有り, 51, pt. 1, 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012.

A. Futaki and Y. Sano: Multiplier ideal sheaves and geometric problems, ``Variational Problems in Differential Geometry (Eds. R. Bielawski, K. Houston and M. Speight)'', LMS Lecture Notes series, 査読有り, 394(October 2011), 68--93, Cambridge University Press.

A. Futaki and H. Ono: Einstein metrics and GIT stability, Sugaku Expositions, 査読有り, 24(2011), 93-122.

A. Futaki and Y. Sano: Multiplier ideal sheaves and integral invariants on toric Fano manifolds, Mathematische Annalen, 査読有り, 350(2011), 245-267. DOI: 10.1007/s00208-010-0556-9

A. Futaki and M.T. Wang, Constructing Kaehler-Ricci solitons from Sasaki-Einstein manifolds, Asian Journal of Mathematics, 査読有り, 15(2011), 33--52, March. DOI: <http://dx.doi.org/10.4310/AJM.2011.v15.n1.a3>

A. Futaki, Momentum construction on Ricci-flat Kaehler cones, Tohoku Math. J. 査読有り, 63 (2011), pp. 21--40. DOI: 10.2748/tmj/1303219934

A. Futaki, H. Ono and Y. Sano, Hilbert series and obstructions to asymptotic semistability, Advances in Math., 査読有り, 226 (2011), 254--284. DOI: 10.1016/j.aim.2010.06.018

A. Futaki, Toric Sasaki-Einstein Geometry, in Fourth International Congress of Chinese Mathematicians, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, 査読有り, vol. 48, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010, pp. 107-125.

A. Futaki, H. Ono and G. Wang, Transverse Kaehler geometry of Sasaki manifolds and toric Sasaki-Einstein manifolds, Journal of Differential Geometry, 査読有り, 83(2009), 585-636.

[学会発表](計38件)

1. A. Futaki: Special Lagrangian submanifolds and Lagrangian self-shrinkers in toric Calabi-Yau cones, Conformal and

Kaehler geometry, Institut Henri  
Poincare, Paris,  
December 12, 2012 France.

2 . 二木昭人 , 複素微分幾何に現れる積分不  
変量について , 東京大学談話会 ,

2012年11月16日

3 . 二木昭人 , 幾何学的流れとその自己相似  
解 , 東北大学談話会 , 2012年11月5日 .

4 . 二木昭人 , 錐多様体上の平均曲率流の自己  
相似解 , 広島幾何学研究集会 2012 ,  
2012年10月5日(金) .

5 . 二木昭人 , コンパクト多様体上の縮小  
勾配リッチソリトンの直径について , 広島幾  
何学研究集会 2012 , 2012年10月5日(金) .

6 . 二木昭人 , Geometric flows and  
their self-similar solutions,  
トポロジー火曜セミナー , 東京大学数理科学  
研究科 , 2012年10月2日 .

7 . A.Futaki : Special Lagrangian  
submanifolds and Lagrangian  
self-shrinkers in toric Calabi-Yau cones,  
International Conference on Differential  
Geometry and Nonlinear PDEs,  
Hunan Normal University, May 16, 2012,  
Chansha, China.

8 . 二木昭人 , Kaehler-Einstein 計量と GIT  
安定性 , 日本数学会年会 , 総合講演 , 東京理  
科大学 , 2012年3月29日 .

9 . A.Futaki : Special Lagrangian  
submanifolds and Lagrangian  
self-shrinkers in toric Calabi-Yau cones,  
Geometry Seminar, Sun Yat-sen University,  
Guangzhou, March 22, 2012, , China.

10 . A.Futaki: Special Lagrangian  
submanifolds and Lagrangian  
self-shrinkers in toric Calabi-Yau  
cones, Geometry  
Seminar, University of Hong Kong,  
March 13, 2012, Hong Kong.

11 . A.Futaki : Self-similar solutions to  
the mean curvature flow on cone manifolds,  
Chinese Academy of Sciences, Beijing,  
February 22, 2012, China.

12 . 二木昭人 , Lower diameter bounds for  
compact shrinking Ricci solitons ,  
松江微分幾何学研究会2011 , 島根大学,  
2011年12月17日 .

13 . A. Futaki : Lower diameter bounds for  
compact shrinking Ricci solitons,

``Introduction to Modern Mathematics'',  
Mathematical Science Center, Tsinghua  
University, September 23, 2011, China.

14 . A.Futaki : Integral invariants in  
complex geometry, Beijing International  
Center for Mathematical Sciences, Peking  
University, September 19, 2011, China.

15 . A.Futaki : Extremal Kaehler metrics  
and GIT stability, Mathematical Science  
Center, Fall Program 2011, Tsinghua  
University, September 6 - 29, 2011, China.

16 . A.Futaki : Integral invariants in  
complex differential geometry,  
Mathematics Colloquium, University  
of Freiburg, July 7, 2011, Germany.

17 . A.Futaki : Integral invariants in  
complex differential geometry,  
Differentialgeometrie im Gro{Yss}en,  
Mathematisches Forschungsinstitut  
Oberwolfach, July 7, 2011, Germany.

18 . A.Futaki : Lower diameter bounds for  
compact shrinking solitons,  
Complex Geometry Seminar Series, Simons  
Center for Geomtry and Physics, State  
University of New York at Stony Brook,  
May 4, 2011, USA.

19 . A.Futaki : Asymptotic Chow  
semistability in Kaehler geometry,  
International Congress of Chinese  
Mathematicians, Tsinghua University,  
December 17-22, 2010, Beijing, China.

20 . A.Futaki : Asymptotic Chow  
semistability in Kaehler geometry,  
G{Y}eom{Y}etrie des vari{Y}etes complexes  
IV, Luminy, 25 au 29 Octobre 2010, France.

21 . 二木昭人 , Lower diameter bounds for  
compact shrinking solitons , 第16回  
複素幾何シンポジウム , 信州菅平高原 ,  
プチホテルゾントック ,

2010年10月20日(水) ~ 23日(土)

22 . 二木昭人 , Kaehler geometry and  
asymptotic Chow semistability,

「Lie変換群と複素幾何学」, 2010年9月  
26日(日) ~ 29日(水) , NASPAニューオータニ ,  
越後湯沢 .

23 . A.Futaki : Lower diameter bounds for  
compact shrinking solitons, the 6th  
Geometry Conference for Friendship of  
China and Japan, Northwestern University,  
Xi'an, September 4 - 8, 2010, China.

24 . A.Futaki : Toric Sasakian-Einstein  
manifolds, ``2010 International Workshop  
on Differential Geometry, Gravitation and  
String Theory'', Ehwa Womans University in  
Seoul, August 20, 2010, Korea.

25 . A.Futaki : Kaehler geometry and

asymptotic Chow semistability, The 5th Pacific Rim Conference on Mathematics, Stanford University, June 28 - July 2, 2010, USA.

26 . A.Futaki : Kaehler geometry and asymptotic Chow semistability, One Day Conference on Geometry, Chinese University of Hong Kong, April 28, 2010, Hong Kong.

27 . A.Futaki : Introduction to Sasakian geometry, Lecture series, Chinese University of Hong Kong, April 26, 29, 2010, Hong Kong.

28 . 二木昭人 , Fano 多様体上の Bakry-Emery 幾何, 慶応大学トポロジーセミナー, 2010年4月19日(月).

29 . A.Futaki : Multiplier ideal sheaves and geometric problems, 2010 Great Lakes Geometry Conference, University of Wisconsin at Madison, April 10-11, 2010, USA.

30 . 二木昭人 , ケーラー幾何と漸近的 Chow 半安定性, Complex Geometry 2010, 2010年3月19日(金) ~ 21日(土), 大阪大学理学部 .

31 . A.Futaki : Kaehler geometry and obstructions to asymptotic Chow semistability, Columbia Geometry and Analysis Seminar, March 4, 2010, Columbia University, New York, USA.

32 . A.Futaki : Kaehler-Ricci solitons and Sasaki-Einstein geometry, Geometry/Topology Seminar, State University of New York at Stony Brook, March 2, 2010, USA.

33 . 二木昭人 , 乗数イデアル層と積分不変量, 筑波大学談話会, 2010年2月4日 .

34 . 二木昭人 , Multiplier ideal sheaves and integral invariants, 代数幾何シンポジウム, 城崎, 2009年10月27日~30日 .

35 . 二木昭人 , Kaehler および佐々木・Einstein 多様体に関する最近の進展, 日本数学会, 総合講演, 大阪大学, 2009年9月25日 .

36 . A.Futaki : Multiplier ideal sheaves and integral invariants, 'The 4th Pacific Rim Conference on Complex and Symplectic Geometry', July 30-August 6, 2009, Sichuan University, Chengdu, China.

37 . A.Futaki : Constructing Kaehler-Ricci solitons from Sasaki-Einstein metrics, 'Extremal Kaehler metrics', June 28 - July 3, 2009, The Banff International Research Station (BIRS), Canada.

38 . A.Futaki : Hilbert series and obstructions to asymptotic semistability, 'Kaehler and Sasakian Geometry', 16-19 June 2009, Rome, Italy.

[図書](計0件)

[産業財産権]

該当せず

[その他]

ホームページ

<http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~afutaki/welcome-jtoday.html>

6 . 研究組織

(1)研究代表者

二木昭人 (Akito Futaki)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号 : 90143247

(2)研究分担者

安井幸則 (Yasui Yukinori)

大阪市立大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号 : 30191117

(3)連携研究者

満淵俊樹 (Toshiki Mabuchi)

大阪大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号 : 80116102

芥川一雄 (Kazuo Akutagawa)

東京工業大学・大学院理工学研究科・教授

研究者番号 : 80192920

小野 薫 (Kaoru Ono)

京都大学・数理解析研究所・教授

研究者番号 : 20204232

中島 啓 (Hiraku Nakajima)

京都大学・数理解析研究所・教授

研究者番号 : 00201666

小野 肇 (Hajime Ono)

埼玉大学・大学院理工学研究科・准教授

研究者番号 : 70467033