

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 20 日現在

機関番号：11301
 研究種目：基盤研究(A)
 研究期間：2009～2011
 課題番号：21244009
 研究課題名（和文）無限次元確率解析の新展開とその応用

研究課題名（英文）New development of infinite dimensional stochastic analysis and its applications

研究代表者
 会田 茂樹 (AIDA SHIGEKI)
 東北大学・大学院理学研究科・教授
 研究者番号：90222455

研究成果の概要（和文）：以下の成果を得た：

- (1) ラフパス解析の視点からのラプラス近似・ループ群上での 1 次元 L^2 コホモロジーの消滅などの研究
- (2) (構成的)場の量子論に現れるハミルトニアンの特値の準古典極限の決定、汎関数積分による解析
- (3) アレクサンドロフ空間上の確率測度のなす空間の幾何に関して熱流とエントロピーの勾配流が一致するなど、確率測度の空間の幾何に関する成果
- (4) ウィーナー空間の H-凸集合上のソボレフ空間の性質や極限定理の一種である処罰問題に関する基本的な成果、その他確率論の基礎事項に関する結果

研究成果の概要（英文）：The study subjects and results are as follows:

- (1) Laplace approximation and the vanishing of L^2 -cohomologies of loop groups from the view point of rough path analysis,
- (2) Studies on semi-classical properties of Hamiltonian in quantum field theory, Studies from the view point of functional integration,
- (3) Basic results on the geometry of the space of probability measures
- (4) Basic study on Sobolev spaces on H-convex set in Wiener spaces and penalization problem and basic results for probability theory

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009 年度	4,200,000	1,260,000	5,460,000
2010 年度	6,500,000	1,950,000	8,450,000
2011 年度	4,500,000	1,350,000	5,850,000
年度			
年度			
総計	15,200,000	4,560,000	19,760,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：確率解析、場の量子論、ラフパス解析、ループ空間、準古典極限、最適輸送写像、確率測度の幾何学、処罰問題

1. 研究開始当初の背景
 確率解析に新風をもたらしている 2 分野、ラフパス解析・最適輸送問題の研究を進展させつつ、これらの成果を取り入れ、無限次元確

率解析の研究を行うことを構想した。

2. 研究の目的

ラフパス解析と最適輸送問題の新たな研究の問題意識と研究成果を発展させつつ取り入れ、無限次元空間上の測度をもとにした解析、パスの解析をもとにした確率解析の研究を行うことにある。

3. 研究の方法

(1) ループ空間・場の量子論に現れる作用素の研究

(2) 最適輸送問題に関連して現れる解析

(3) Wiener 空間の部分集合上の解析

(4) 振動積分・汎関数積分の研究

(5) 1次元の確率過程の解析

(6) 数理ファイナンスに関連した確率解析

(7) 熱核の研究

(8) ラフパス解析

の8つのテーマについて分担者・連携研究者・研究協力者と討論を行い研究を進めた。そのため、様々な研究集会の開催、研究集会での情報収集・成果発表を行った。

4. 研究成果

(1) ラフパス解析

①ハーストパラメータが(1/3, 1/4)にあるときの非整数ブラウン運動の汎関数積分に関するラプラス近似をラフパス解析を用いて解析した。確率微分方程式で決まる確率過程から導出される微分過程(ヤコビアン過程)のモーメント評価を行った。(稲浜)

②ラフパス理論の基本定理の証明に用いられる新古典不等式の、最良係数に関する予想を肯定的に解決した。(日野と研究協力者:原啓介((株)Access 所属の共同研究)

必ずしも(ブラウン運動の経路のように)局所的に強く振動していない関数の大域的な挙動をラフパス理論によって調べるため、ラフパス理論の基本的な性質を調べ、およびフーリエ解析への応用の可能性を探った。(原)

(2) 数理ファイナンスへの応用を意識した成果

①確率微分方程式の係数が滑らかでない場合のMalliavin解析を行い、解の加法汎関数の密度関数が滑らかであることを証明した。

②Asian型確率微分方程式の解の密度関数の下からの評価を得た。

③Malliavin-Thalmaier公式を利用して、GREEKSの新計算方法を提案し、様々な例につ

いてシミュレーションを行った。

④ジャンプ型モデルの場合にGREEKSの計算方法について研究を行った。特にSubordinated過程に関して一般公式を得て、シミュレーションを行い、他の方法との比較を行った。

(以上、Kohatsu-Higa Arturo)

(3) ループ空間・場の量子論

①時間によらないローレンツ多様体上に定義された場の量子論のハミルトニアンを汎関数積分を用いて解析した。また紫外切断を確率論的手法によって外すことに成功した。熱半群の真空期待値を経路積分表示することにより、従来の作用素論的手法とは全く異なる仕方でも紫外切断を外した。さらにくりこみ項の新しい解釈を与えることに成功した。

擬リーマン多様体に定義されたスカラーな場の量子論のモデルの基底状態の存在、非存在、紫外切断の除去をC. Gerard(Orsay), A. Suzuki(信州), A. Panati(Toulon)と共同で証明した。主な手法は確率論とmicro-local解析による。(広島)

② $P(\phi)_2$ -ハミルトニアンの第一固有値の準古典極限を決定した。また、第二固有値との差の準古典極限をAgmon距離で評価する結果の端緒を得た。ラフパス解析の意味での開路上の1-微分形式に関して、ポアンカレ型の消滅定理を示した。これの応用として、単連結コンパクトリーマン多様体のループ空間上の1次元 L^2 コホモロジーの消滅を証明した。

リーマン多様体の連続な道の空間の中の測地線を含む小さな開部分集合上でディリクレラプラシアンを考えその一般化された意味での第二固有値の準古典極限が存在し、道のエネルギー関数の測地線におけるヘッシアンのスペクトル下限と一致することを示した。この結果は更に検討して学術誌に投稿する予定である。(会田)

③S. Albeverio, M. Roeckner 両氏と経路空間上の微分作用素の一意的問題および対応する拡散過程の確率偏微分方程式を用いた特徴付けに関する共同研究を行った。(河備)

(4) 確率測度の幾何・最適輸送問題

①確率測度の空間の幾何学について研究し、その成果の1つとして、曲率が負定数以上のアレクサンドロフ空間上の確率測度のなす空間での第一変分公式を得た。応用として、凸関数の勾配流の収縮性などが得られる。(太田)

②確率最適輸送問題の時間無限大での漸近理論の研究のために、確率最適輸送問題のヴァッサーシュタインの距離に関するある種

の連続性を特別な場合に示した。KRP の確率流のランダムな確率密度関数の表現定理を与えた。また、このランダムな確率密度関数の空間変数に KRP を代入したものの対数の平均が凸性を持つことを示した。(三上)

(5) Wiener 空間の部分集合上の解析

抽象 Wiener 空間における H-convex かつ H-open な集合について、1 階 L^2 -Sobolev 空間の 2 種類の定義が同値であることを示した。(日野)

(6) その他(確率論全般について)

①レヴィの確率面積と、タイプ A, B の Eulerian 多項式, Euler 多項式, Bernoulli 多項式との関連を明らかにした。またアンダーソン・ダーリング検定に付随する 2 次ウィナー汎関数を詳しく調べた。(谷口)

②準楕円型作用素の Kolmogorov の例に関して古典力学の立場からの考察を行い、摂動に関する連続性を示した。また、ベッセル過程の到達時刻の分布に関して、密度関数の具体形を求め新たな公式を得た。(松本)

③Pitman と Yor が導入した 2 パラメータ Poisson-Dirichlet 分布について点過程の観点から解析した結果、確率母関数の表示から様々な密度公式や極限定理が得られた。

移入を伴う連続相空間上の分枝過程を考察した。特に、付随する非対称 Dirichlet 形式のセクター定数の評価を定常分布の特性量である Thorin 測度の言葉で与えた。(半田)

④服部久美子、服部哲弥両氏らとともに、両氏により提唱された確率ランキング過程に対し、ランキング過程を構成する各粒子のジャンプ率が時間依存性を持つ場合における無限粒子極限について考察した。(針谷)

⑤二つの処罰問題が共通のシグマ有限測度によって統合される条件を、対応する調和関数の漸近挙動によって与えた。また、後続マルコフ性を持つ測度のクラスにおける端点性をエルゴード性と関係づけた。

一次元対称安定レヴィ過程に対する処罰問題(極限定理の一種)を Yor 氏及び矢野裕子氏と共同で研究し、局所時間の関数及びカット消滅の場合において、ブラウン運動の場合の既知の結果を見通しよく拡張することに成功した。さらに、開区間上の極小マルコフ過程の境界問題を周遊理論を用いて解決した。(矢野)

⑥リーマン多体上の非対称な拡散作用素に対する一意性の問題を、 L^2 の場合と L^p の場合とで十分条件を、ドリフトの発散の有界性と内向き増大度が距離に関して線形という形で与えた。これを利用して、生成作用素

の定義域の決定も行った。非対称なマルコフ過程のうち、生成作用素が正規作用素となるものを考察し、扇形条件を満たす Dirichlet 形式が対応する条件をスペクトルで与え、スペクトルが完全に決定できる具体的な例の計算を行った。(重川)

⑦退化した rate を持つ simple exclusion process に対する spectral gap の良い評価を得た。(永幡)

⑧一般の強局所正則ディリクレ形式に対して可測的リーマン構造が付随することを示し、確率解析への応用を与えた。(日野)

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 86 件)

①Yuzuru Inahama, Laplace approximation for rough differential equation driven by fractional Brownian motion, Ann. Probab. 査読有 41(2013)170-205. DOI:10.1214/11-AOP733

②Yuzuru Inahama, A moment estimate for the derivative process in rough path theory, Proc. Amer. Math. Soc. 査読有, 140(2012), 2183-2191. DOI:10.1090/S0002-9939-2011-11051-7

③Kenji Handa, The sector constants of continuous state branching processes with immigration, J. Funct. Anal. 査読有, 262(2012), 4488-4524. DOI:10.1016/j.jfa.2012.02.026

④Sergio Albeverio, Hiroshi Kawabi and Michael Roeckner, Strong uniqueness for both Dirichlet operators and stochastic dynamics to Gibbs measures on a path space with exponential interactions, J. Funct. Anal. 査読有, 262(2012), 602-638. DOI:10.1016/j.jfa.2011.09.023

⑤C. Gerard, F. Hiroshima, A. Pannati and A. Suzuki, Absence of ground state of the Nelson model with variable coefficients, J. Funct. Anal. 査読有, 262, (2012), 273-299. DOI:10.1016/j.jfa.2011.09.010

⑥Arturo Kohatsu-Higa, A Malliavin calculus method to study densities of additive functionals of SDE's with irregular drifts, Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. 査読有, 48(2012), 871-883. DOI:10.1214/11-AIHP418

⑦Isao Higuchi and Toshio Mikami, Maxima

and minima of overall survival functions with fixed marginal distributions and transmission of technology, Communications in Statistics-Theory and Methods, 査読有, 41 (2012), 46-61. DOI:10.1080/03610926.2010.513788

⑧ Shigeki Aida, COH-formula and Dirichlet Laplacians on small domains of pinned path spaces, Contemporary Mathematics, 査読有, 545 (2011), 1-12. DOI:10.1090/conm/545

⑨ Shigeki Aida, Vanishing of one-dimensional L^2 cohomologies of loop groups, J. Funct. Anal. 査読有, 261, (2011), 2164-2213. DOI:10.1016/j.jfa.2011.06.003

⑩ C. Gerard, F. Hiroshima, A. Pannati and A. Suzuki, Infrared problem for the Nelson model on static space-time, Comm. Math. Physics, 査読有, 308, (2011), 543-566. DOI:10.1007/s00220-011-1289-7

⑪ Ichiro Shigekawa, Semigroups preserving a convex set in a Banach space, Kyoto J. Math. 査読有, 51 (2011), 647-672. DOI:10.1215/21562261-1299918

⑫ Masanori Hino, Dirichlet spaces on H-convex sets in Wiener space, Bull. Sci. Math. 査読有, 135 (2011), 667-683. DOI:10.1016/j.bulsci.2011.07.008

⑬ N. Ikeda and Setsuo Taniguchi, Euler polynomials, Bernoulli polynomials, and Lévy's stochastic area formula, Bull. Sci. Math. 査読有, 135 (2011), 684-694. DOI:10.1016/j.bulsci.2011.07.009

⑭ Yukio Nagahata and Makiko Sasada, Spectral gap for multi-species exclusion processes, J. Stat. Physics, 査読有, 143 (2011), 381-398. DOI:10.1007/s10955-011-01760-0

⑮ Shin-ichi Ohta and Asuka Takatsu, Displacement convexity of generalized relative entropies, Adv. Math. 査読有, 228 (2011), 1742-1787. DOI:10.1016/j.aim.2011.06.029

⑯ Kouji Yano, Wiener integral for the coordinate process under the σ -finite measure unifying Brownian penalizations, ESAIM Probab. Stat. 査読有, 15 (2011), 69-84. DOI:10.1051/ps/2010024

⑰ A. Matsumoto and K. Yano, On a zero-one law for the norm process of transient random walk, Seminaire de Probabilites, 査読有, XLIII, (2011), 757-798.

⑱ Shigeki Aida, Rough path analysis: An introduction, Adv. Stud. Pure Math. 査読有, 57, (2010), 1-28.

⑲ Yuzuru Inahama, A note on rough differential equations with unbounded diffusion coefficients, Adv. Stud. Pure Math. 査読有, 57, (2010), 155-170.

⑳ Ichiro Shigekawa, Non-symmetric diffusions on a Riemannian manifold, Adv. Stud. Pure Math. 査読有, 57, (2010), 437-461.

㉑ Masanori Hino, Sets of finite perimeter and the Hausdorff-Gauss measure on the Wiener space, J. Funct. Anal. 査読有, 258 (2010), 1656-1681. DOI:10.1016/j.jfa.2009.06.033

㉒ Keisuke Hara and Masanori Hino, Fractional order Taylor's series and the neo-classical inequality, Bull. Lond. Math. Soc. 査読有, 42 (2010), 467-477. DOI:10.1112/blms/bdq013

㉓ Nobuyuki Ikeda and Setsuo Taniguchi, The Ito-Nisio theorem, quadratic Wiener functionals and 1-solitons, Stoch. Proc. Appl. 査読有, 120 (2010), 605-621. DOI:10.1016/j.spa.2010.01.009

㉔ Kouji Yano, Y. Yano and M. Yor, Penalization of a stable Levy process involving its one-sided supremum, Ann. Inst. Henri Poincare Probab. Stat. 査読有, 46 (2010), 1042-1054. DOI:10.1214/09-AIHP339

㉕ Kouji Yano, Excursions away from a regular point for one dimensional symmetric Lévy processes without Gaussian part, Potential anal. 査読有, 32 (2010), 305-341. DOI:10.1007/s11118-009-9152-6

㉖ Kouji Yano, Cameron-Martin formula for the σ -finite measure unifying Brownian penalizations, J. Funct. Anal. 査読有, 258 (2010), 3492-3516. DOI:10.1016/j.jfa.2009.11.021

②⑦ Shin-ichi Ohta, Optimal transport and Ricci curvature in Finsler geometry, Adv. Stud. Pure Math. 査読有, 57, (2010), 475-516.

②⑧ Hiroyuki Matsumoto, Limiting behaviors of the Brownian motions on hyperbolic spaces Colloquim Mathematicum, 査読有, 119 (2010), 475-516.

②⑨ Yuzuru Inahama, A stochastic Taylor-like expansion in the rough path theory, J. Theoret. Probab. 査読有, 23 (2010) 671-714.
DOI:10.1007/s10959-010-0287-6

③⑩ Vlad Bally and Arturo Kohatsu-Higa, Lower bounds for densities of Asian type stochastic differential equations, J. Funct. Anal. 査読有, 258 (2010) 3134-3164.
DOI:10.1016/j.jfa.2009.10.027

③⑪ Yukio Nagahata and Nobuo Yoshida, Localization for a class of linear systems, Electron. J. Probab. 査読有, 15 (2010) 636-653. DOI:10.1214/EJP.v15-757

③⑫ Yukio Nagahata, Spectral gap for zero-range processes with jump rate $g(x)=x^\gamma$, Stochastic Process. Appl. 査読有, 120 (2010) 949-958.
DOI:10.1016/j.spa.2010.01.019

③⑬ Shigeki Aida, Semi-classical limit of the lowest eigenvalue of a Schrödinger operator on a Wiener space:
II. $P(\phi)_2$ -model on a finite volume, J. Funct. Anal. 査読有, 256 (2009), 3342-3367. DOI:10.1016/j.jfa.2008.10.001

③⑭ Setsuo Taniguchi, A Wiener integral approach to non-commutative harmonic oscillators, Kyushu J. Math. 査読有, 63-2 (2009) 347-352.
DOI:10.2206/kyushujm.63.347

③⑮ Kouji Yano, Y. Yano and M. Yor, On the laws of first hitting times of points for one-dimensional symmetric stable Lévy processes, Séminaire de Probabilités, 査読有, 42 (2009) 187-227.

③⑯ Kouji Yano, Y. Yano and M. Yor, Penalizing symmetric stable Lévy paths, J. Math. Soc. Japan, 査読有, 61 (2009) 757-798. DOI:10.2969/jmsj/06130757

③⑰ Shin-ichi Ohta, Gradient flows on Wasserstein spaces over compact Alexandrov spaces, Amer. J. Math. 査読有, 131 (2009) 475-516.
DOI:10.1353/ajm.0.0048

③⑱ Shin-ichi Ohta, Uniform convexity and smoothness, and their applications in Finsler geometry, Math. Ann. 査読有, 343 (2009) 669-699.
DOI:10.1007/s00208-008-0286-4

③⑲ Hiroyuki Matsumoto, J. Wesolowski and P. Witkowski, Tree structured independence for exponential Brownian functionals, Stochastic Process. Appl. 査読有, 119 (2009) 3793-3815.
DOI:10.1016/j.spa.2009.07.008

④⑰ Kenji Handa, The two-parameter Poisson-Dirichlet point process. Bernoulli, 査読有, 15 (2009) 1082-1116.
DOI: 10.2307/20680193

[学会発表] (計 134 件)

① Shigeki Aida, Tunneling for spatially cut-off $P(\phi)_2$ -Hamiltonian, Stochastic analysis and its application, 2011年9月8日, Bonn, GERMANY.

② Masanori Hino, Martingale dimensions for self-similar fractals, 34th Conference on Stochastic Processes and Their Applications, 2010年9月10日, 大阪.

③ Shigeki Aida, COH formula and Dirichlet Laplacians on small domains of pinned path spaces, 34th conference of SPA, 2010年9月7日, 大阪.

④ Shigeki Aida, Log-Sobolev inequalities and semi-classical limit of $P(\phi)_2$ -Hamiltonians, 国際研究集会 Concentration, functional inequalities And isoperimetry, 2009年10月31日 Florida, USA.

⑤ Ichiro Shigekawa, Non-symmetric Diffusion on a Riemannian manifold, 33rd Conference on Stochastic Processes and Their Applications, July 31, 2009 Berlin, GERMANY.

⑥ Shigeki Aida, Vanishing of one dimensional L^2 cohomologies of loop groups, 33rd conference of SPA, 2009年7月30日

Berlin, GERMANY.

⑦ Yuzuru Inahama, Rough path analysis for an infinite dimensional diffusion, The first Institute of Mathematical Statistics, Asia-Pacific Rim Meeting, 2009年6月29日, Seoul University, SOUTH KOREA.

⑧ Shin-ichi Ohta, Ricci curvature, entropy and optimal transport, Optimal Transportation: Theory and Applications 2009年6月22-26日(連続講義), Universite Joseph Fourier, Grenoble, FRANCE.

[図書] (計2件)

① 会田茂樹、数学書房「日本の現代数学」、2009年、1-23ページ。

② J.Lőrinczi, Fumio Hiroshima, V.Betz, Walter de Gruyter Inc, 「Feynman-Kac-Type Theorems and Gibbs measures on Path space. With applications to rigorous quantum field theory」, 2011, 1-505.

[その他]

ホームページ:

<http://www.math.tohoku.ac.jp/~aida/index-j.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

会田茂樹 (AIDA SHIGEKI)
東北大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 90222455

(2) 研究分担者

重川一郎 (SHIGEKAWA ICHIRO)
京都大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 00127234

松本裕行 (MATSUMOTO HIROYUKI)
青山学院大学・理工学部・教授
研究者番号: 001950538

半田賢司 (HANDA KENJI)
佐賀大学・大学院工学研究科・准教授
研究者番号: 10238214

河備浩司 (KAWABI HIROSHI)
岡山大学・自然科学研究科・准教授
研究者番号: 80432904

稲浜譲 (INAHAMA YUZURU)
名古屋大学・大学院多元数理科学

研究科・准教授
研究者番号: 80431998

永幡幸生 (NAGAHATA YUKIO)
新潟大学・自然科学系・准教授
研究者番号: 50397725

矢野孝次 (YANO KOUJI)
京都大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号: 80467646

(3) 連携研究者

日野正訓 (HINO MASANORI)
大阪大学・大学院基礎工学研究科・教授
研究者番号: 40303888

コハツ-ヒガアルツ-ロ (KOHATSU-HIGA ARTURO)

立命館大学・理工学部・教授
研究者番号: 80420412

廣島文生 (HIROSHIMA FUMIO)
九州大学・大学院数理学研究院・教授
研究者番号: 00330358

谷口説男 (TANIGUCHI SETSUO)
九州大学・大学院数理学研究院・教授
研究者番号: 70155208

針谷祐 (HARIYA YUU)
東北大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号: 20404030

二宮祥一 (NINOMIYA SHOITI)
東京工業大学・大学院イノベーション
マネジメント研究科・教授
研究者番号: 70313377

高信敏 (TAKANOBU SATOSHI)
金沢大学・理工研究域数物科学系・
教授
研究者番号: 40197124

太田慎一 (OHTA SHIN-ICHI)
京都大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号: 00372558

三上敏夫 (MIKAMI TOSHIO)
広島大学・大学院工学研究科・教授
研究者番号: 70229657