

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 4 月 20 日現在

機関番号：11301

研究種目：基盤研究（B）

研究期間：2009～2011

課題番号：21340002

研究課題名（和文） 混合モティーフ層と圏論およびサイクル複体の研究

研究課題名（英文） Mixed motivic sheaves, category theory, and study of cycle complexes

研究代表者

花村 昌樹 (HANAMURA MASAKI)

東北大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：60189587

研究成果の概要（和文）：Quasi DG 圏とは DG 圏を拡張した概念で、代表者によって与えられたもので、混合モティーフ層の理論に現れる。この理論の基礎理論を構築した。

そのうち主なものは、quasi DG 圏の基礎公理の定式化、quasi DG 圏に値をもつ C-diagram の定式化、quasi DG 圏の関数複体の加法性、C-diagram のなす quasi DG 圏の構成、そのホモトピー圏が三角圏をなすことの証明である。

とくに、その概念のひとつをなす複体 (n 個の対象に依存する) が各対象について加法的であることを定式化し、その性質が対応する C-diagram の quasi DG 圏に伝播することを示した。

また、正規代数曲面に対し、その Chow コホモロジーを特異点解消を用いて記述する結果を示し、とくに Chow コホモロジーと Chow コホモロジーが一致するための条件を与えた。

準射影代数多様体をブローアップしたとき、そのモティーフおよび高次 Chow 群がどのように記述できるを示す、blow-up formula を示した。

研究成果の概要（英文）：Quasi DG category, a generalization of DG category given by the principal researcher, is a notion that appears in the theory of mixed motivic sheaves. We developed the basic theory of quasi DG categories. The main features are basic axioms of a quasi DG category, the notion of C-diagrams with values in a quasi DG category, additivity of the function complexes, the construction of the quasi DG category of C-diagrams, and the proof that the homotopy category of the quasi DG category of C-diagrams has the structure of a triangulated category.

In particular, when the function complex (depending on n objects) that constitutes part of the notion, is additive in each variable, the same property was proven to hold for the function complex for C-diagrams.

We described the Chow cohomology of an algebraic surface using its resolution of singularities. In particular, we gave a condition for Chow cohomology and homology to coincide.

We showed the blow-up formula for the motives and higher Chow groups of a quasi-projective variety.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009 年度	1,700,000	510,000	2,210,000
2010 年度	1,700,000	510,000	2,210,000
2011 年度	1,700,000	510,000	2,210,000
年度			
年度			
総計	5,100,000	1,530,000	6,630,000

研究分野： 数物系科学

科研費の分科・細目： 数学・代数学

キーワード： 代数幾何学，モテーフ理論，三角圏

1. 研究開始当初の背景

(1) DG 圏の概念を一般化した圏論的構造が混合モテーフ理論において自然に現れた. このような DG 圏に近い構造をどのように定式化するか, またその構造を与えられたとき, それから三角圏を構成することができるかが問題となった.

(2) モテーフヴィック・コホモロジーが定義されていたが, 具体的な計算例が少なかった.

(3) Chow 群に対する blow-up formula が知られていたが, 準射影多様体のモテーフに対して blow-up formula は知られていなかった.

2. 研究の目的

(1) DG 圏の場合をモデルとし適切な公理 (とくに加法性について) を与え, その性質が C-diagram の quasi DG 圏でも成りたつことを示すこと. とくに, 基礎となる圏および関数複体に対し, どのような加法性の条件を課すことを行う.

(2) Chow コホモロジーを曲面の場合に理解し, Chow 群と比較する.

(3) 準射影多様体のモテーフに対して blow-up formula を示す. それにより motivic cohomology の descent 性質を導く.

3. 研究の方法

(1) 基礎となる圏を symmetric monoidal groupoid とし, 加法性が quasi-isomorphism の意味で成りたつような公理を考察した.

(2) 特異点解消を用いて Chow コホモロジーを記述する.

(3) 高次 Chow 群の blow-up formula をまず示し, 準射影多様体のモテーフを定める普遍性を用いてモテーフの blow-up formula を示す.

4. 研究成果

(1) Quasi DG 圏の研究. DG 圏の一般化として quasi DG 圏の概念が代表者によって提出されていたが, その基礎理論を構築した. Quasi DG 圏は, 対象のクラスおよび, 2 個以上の対象の有限列に対

して定まる “関数複体” および, それらの間の 2 種類の写像で, 適切な公理をみたすものからなる. 必要な公理の一部として, 関数複体の各成分についての加法性と呼ぶべき適切な条件を課した.

次に, 与えられた Quasi DG 圏に値を持つ C-diagram という概念を導入した. C-diagram 全体をクラスとする quasi DG 圏が存在することを以下のように示した. C-diagram の有限列に対し, 関数複体および 2 種類の写像を適切に構成した. C-diagram の列について, 対応する関数複体がやはり同じ意味の加法性をみたすことを示した. その帰結として, C-diagram のなす quasi DG 圏のホモトピー圏が加法圏であることを示した.

ついで, このホモトピー圏がそれが三角圏の構造をもつことを示した.

これを論文 Quasi DG categories and mixed motivic sheaves にまとめ, 投稿した.

(2) 底多様体上の代数多様体のなす quasi DG 圏の構成. 準射影多様体 S の上のスムーズな代数多様体のなす quasi DG 圏をサイクル複体を用いて構成した. 基礎体上のスムーズな代数多様体で S への写像を与えられたもの全体をクラスとし, 関数複体が, 与えられた代数多様体の S 上のファイバー積のサイクル複体に quasi-isomorphic であるようなものを構成した. とくに, ファイバー積の higher Chow 群の合成積を定めた.

(a)の結果を用いることにより, 三角圏が得られるが, これが S 上の混合モテーフ層の圏である.

これらを論文 Cycle theory of relative correspondences にまとめ, 投稿した.

(3) 正規代数曲面の Chow コホモロジー. 一般に, 代数多様体に対し, その Chow コホモロジーとホモロジーが定義される. 前者は代表者により, 代数多様体の simplicial resolution (正確には cubical resolution) を用いて構成された. さらに Chow コホモロジーからホモロジーへの自然な射が存在する.

代表者は, 正規代数曲面 S について, その Chow コホモロジーとホモロジーの食い違いが, S の特異点解消の例外因子の Chow ホモロジーとコホモロジーの食い

違いと一致することを示した。(例外因子については, その Chow ホモロジーからコホモロジーへの自然な射が存在する.)

さらに Chow コホモロジーがホモロジーと一致するための必要十分条件が, 例外因子が有理樹(rational tree)をなすことと同値であることを示した.

この結果を論文 Chow cohomology of algebraic surfaces にまとめ出版をした.

(4) 代数多様体の blow-up と混合モチーフ.

スムーズな準射影代数多様体 S について, それをスムーズな中心 C で blow-up して得られる多様体 X を考える. X のモチーフを S のモチーフおよび C のモチーフで表す公式を証明した. S が射影多様体の場合には, これは Manin の論文にある古典的な結果である. この公式の証明を 3 つ与えた. この公式よりサイクル複体が blow-up についてコホモロジー的なデザントをみたくことができる. なおホモロジー的なデザントをみたくことも Bloch の示した局所完全列より分かる.

さらにこの公式をもちいて, X の高次 Chow 群を S および C の高次 Chow 群で表す公式を示した. これは通常の Chow 群の場合には古典的に知られている.

これらの結果を論文「Blow-ups and mixed motives」にまとめ出版をした.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 5 件)

- ①Masaki Hanamura, 相対的な代数的対応と混合モチーフ層, 査読あり, 数理解析講義録別冊, 2013, 掲載確定.
- ②Masaki Hanamura, Chow cohomology groups of algebraic surfaces, 査読あり, Mathematical Res. Letters, 2013, 掲載確定.
- ③Masaki Hanamura, Relative algebraic correspondences and mixed motivic sheaves, 査読あり, Proc. Japan Academy, 88 (2012), 121-126.
- ④Masaki Hanamura, Blow-ups and mixed motives, 査読あり, Tohoku Math. J., 63(2011), 751-773.

- ⑤花村昌樹, 混合モチーフの理論と応用, 査読あり, 数学, 62 巻 2 号(2010), 182-193.

[学会発表] (計 7 件)

- ①Masaki Hanamura, Quasi DG categories and mixed motivic sheaves, 2013 年 2 月 19 日, 代数幾何解析セミナー, 鹿児島大学
- ②Masaki Hanamura, Mixed Tate categories and the bar complex, 周期積分と超幾何関数, 2012 年 9 月 6 日, 玉原セミナーハウス.
- ③Masaki Hanamura, Hodge realization of mixed motives, 研究集会「モチーフ理論と代数幾何」, 2012 年 3 月 9 日, 東北大学.
- ④Masaki Hanamura, Relative algebraic correspondences and mixed motivic sheaves, 代数的整数論とその周辺, 2011 年 11 月 28 日, 京都大学数理解析研究所.
- ⑤Masaki Hanamura, DG categories and mixed motivic sheave, 東北復旦代数幾何シンポジウム, 2011 年 6 月 15 日, 復旦大学(中国)
- ⑥Masaki Hanamura, Mixed Tate motifs and etale cohomology, 研究集会「周期積分とモチーフ」, 2010 年 2 月 20 日, 東京大学.
- ⑦Masaki Hanamura, Mixed Tate motifs and cohomology realizations, 東北復旦旦大学代数幾何学シンポジウム, 2009 年 11 月 26 日, 東北大学.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

花村 昌樹 (HANAMURA MASAKI)
東北大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 60189587

(2) 研究分担者

()

研究者番号:

(3) 連携研究者

木村 俊一 (KIMURA SHUNICHI)
広島大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 10284150

石田 正典 (ISHIDA MASANORI)

東北大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：30124548

雪江 明彦 (YUKIE AKIHIKO)
京都大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：20312548