

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 20 日現在

機関番号：13901

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2009 年度 ～ 2012 年度

課題番号：21340004

研究課題名（和文） 非可換類体論と志村多様体

研究課題名（英文） Non-commutative class field theory and Shimura varieties

研究代表者 藤原 一宏 (FUJIWARA KAZUHIRO)

大学院多元数理科学研究科・教授

研究者番号：00229064

研究成果の概要（和文）：

非可換類体論の研究を幾何学的視点を含む多方面から行っている。

リジッド幾何学の基礎付けについては加藤と共に O. Gabber (IHES) を交えた国際共同研究が進展した。この共同研究により、(非ネーター性を許す) 可換環の完備化について新たな知見を得た。結果として以前得られていた枠組みを若干広げた部分で基礎が確立することになり、より柔軟な道具を提供することが可能となった。また、リジッド幾何学には類似の理論として R. Huber の adic space の理論、V. Berkovich の Berkovich space の理論があるが、三つの理論の関係が極めて明快な形で説明することができるようになった。

非可換類体論ではガロア表現の変形理論 (Galois deformation theory) を直接数論に応用する、という先行研究にない新たな知見が得られている。研究代表者は以前より総実代数体に対する二次拡大の相対類数の奇素数 p による非可除性 (indivisibility) をその最初の例として取り上げて来たが、応用上十分な一般性を以て解決した。分担者である高井はこの様な二次拡大の数を具体的に下から評価する研究をしており、有理数体の Galois 拡大で p が大の時、評価を得た。

研究成果の概要（英文）：

Non-abelian class field theory is studied from various aspects, including a geometric viewpoint. As for foundations of rigid geometry, a joint research with F. Kato and O Gabber (IHES) went on based on international collaboration, yielding results on the Hausdorff completions of commutative rings. As a result of this research, the foundation of rigid geometry is now established in a more general framework, giving more flexibility in applications. We have also obtained a clear explanation of the relationships between the notion of R. Huber's adic spaces and V. Berkovich's Berkovich spaces.

As part of non-abelian class field theory, we provide a new viewpoint that the deformation theory of Galois representations (Galois deformation theory) can be applied directly to number-theoretical problems. The author has studied the indivisibility of relative class numbers of quadratic extensions by a prime number p as a first example. This is established in general. Our collaborator Y. Takai gave a lower bound estimate for the number of such quadratic extensions, when the field is Galois over the rationals and p is sufficiently large.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009 年度	3,300,000	990,000	4,290,000
2010 年度	3,000,000	900,000	3,900,000
2011 年度	3,100,000	930,000	4,030,000
2012 年度	3,200,000	960,000	4,160,000

年度			
総計	12,600,000	3,780,000	16,380,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：数論・非可換類体論・ガロア表現・保型表現

1. 研究開始当初の背景

研究代表者は従来より非可換類体論に関連する研究を行ってきた。その中でも主な成果として、以下の二つの研究が挙げられる：

- ・Lefschetz 跡公式についての Deligne 予想の解決
- ・非可換類体論と志村多様体との関係の基本的な枠組みの公理化 (Taylor-Wiles 系) についての研究

この研究ではこの流れに沿い、非可換類体論を国際的視野のもとで行うことを目指す。

非可換類体論は歴史が長く、難しい分野であるが、世界的に研究者は多く、谷山豊、志村五郎などの世代を契機に日本人研究者による貢献も大きい。研究代表者の数論幾何学における研究 (特に Deligne 予想の解決) は、モデル理論、有限 Chevalley 群の表現論など、数学一般で幅広く使われるが、特に整数論における非可換類体論で際だった役割を演じており、M. Harris-R. Taylor による局所ラングランズ予想の証明、L. Lafforgue による関数体のラングランズ予想の証明の鍵となっている。既に述べた Taylor-Wiles 系の公理化とその応用、また geometric Jacquet-Langlands correspondence と保型形式の補間との関係も大きな影響を与えており、研究代表者の 2006 年のスペインでの国際数学者会議での講演 (Galois deformations and arithmetic geometry of Shimura varieties, 数論分野) を通し国際的に認知されるところとなっている。この研究計画を推し進める事で非可換類体論での日本の世界的な presence を高めることを目指す。

2. 研究の目的

本研究の目的は、整数論における基本的な思想である非可換類体論の基礎理論と応用を発展させることにある。

非可換類体論とは、高木貞治-E. Artin による古典的類体論をその雛形とするものであり、

- ・代数的、幾何学的に定義された対象 (ガロア表現 ρ)
- ・保型形式という非常に大きな (離散的な) 対称性を持つ関数 (アデル群の表現 π)

の二つの間に対応 (ラングランズ対応) がつくという部分を大きな軸としている。とくに本研究では、非可換類体論の持つ二つの側面

- ・非可換類体論自身の基礎研究
- ・非可換類体論の数論への応用

について成果をあげることを目標とする。特に、

- ・幾何学的ジャッケ-ラングランズ対応、リジッド幾何学との関連
- ・類数の非可除性などの古典的な問題

への応用を明らかにしたい。

幾何学的ジャッケ-ラングランズ対応とは

- ・志村多様体の標数 p での構造をみることにより互いに inner twist になっている代数群 G 、 G' の表現の間に ℓ -進コホモロジー群をかついて直接対応がつけられる (ただし ℓ と p は異なる)

というものである。これは従来 Arthur-Selberg 跡公式を使う方法で導かれていたものであるが、より直接的な対応を与え、とくに (肥田晴三 (UCLA)、E. Urban (Columbia)、M. Emerton (North western) 等の) 保型形式の ℓ -進補間を調べる重要な道具となる。現在、符号 $(1, n)$ のユニタリ群を含むいくつかのケースにおいて対応が知られているが、研究代表者はさらに次の重要な事実注目している：

- ・標数 p の志村多様体 (または p -進解析的実現) は接続層から上記のものと質的に異なる対応を与え、(B. Gross (Harvard) 等による) $\text{mod } p$ -保型形式の間の極めて非自明な対応を与える ($\text{mod } p$ ジャッケ-ラングランズ対応)

つまり、ジャッケ-ラングランズ対応の $\text{mod } p$ 版を幾何学的に定式化することができ、保型形式間の通常では非自明な $\text{mod } p$ 合同式を与える。これを「幾何学的ラングランズ対応と保型形式の p -進補間の理論」の萌芽ととらえ、加藤文元 (熊本大学) と行っているリジッド

幾何学の基礎理論の具体例として位置づけることを目標とする。

古典的な代数的整数論への応用については、例えば、総実代数体と奇素数 p を固定した時、相対類数が p で割れない CM 二次拡大の存在を示す問題 (indivisibility of relative class numbers) は古典的な問題で多くの結果が知られているが、まだ完全な解決には至っていない。研究代表者は跡公式と非可換類体論を組み合わせた新たなアプローチを発見し、研究を進めている。これに関連した問題としては総実代数体の p -進 regulator の non-vanishing (Leopoldt 予想) などもあり研究を進めていきたい。このような非可換類体論の応用は過去に例がない、非常に originality の高い研究であると考えており、大きな目標としている。

3. 研究の方法

国内外との研究者と連携・分担し、共同研究を通しながら進めたい。

申請者は普段から国内、国外における幅広い研究協力体制をとっている。この計画でも、協力体制のサポートに多くのリソースを割り当てられる。

まず、役割分担についてであるが、加藤 (熊本大学) とのリジッド幾何学の基礎付けの仕事は研究手段として有効と考えられるので、分担者として加わる。高井 (東京大学) は indivisibility の問題を研究代表者と別角度でとらえ、分担者として視点を提供する。このように、志村多様体に関し具体的な結果を出すには一般論を効果的に用いることが非常に有効であり、ガイサ、ヘッセルホルト (名古屋大学) に適宜分担者として協力する。同様に斉藤毅 (東京大学) は数論的スキーム上の分岐理論、の専門家として、斉藤秀司 (東京大学) は代数サイクル、Hodge 理論の専門家として連携研究者として視点を提供する。金銅誠之 (名古屋大学) はユニタリ志村多様体の具体例に詳しく、現在までも様々な具体例を提供してくれている。近年特に進歩があった fake projective plane もユニタリ志村多様体の例であり、これら具体例の代数幾何学的小林真一 (東北大学) は p -進的手法、特に p -進補間に強く、保型形式を p -進補間する際の技術を連携研究者として提供する。

藤原はこれらを非可換類体論の観点から総括する。

4. 研究成果

非可換類体論の研究を幾何学的視点を含む多方面から行った。

リジッド幾何学の基礎付けについては基礎理論としての進展があった。特に加藤と共に、O. Gabber (IHES) を交えた国際共同研究が発展し、共著論文 Gabber-Fujiwara-Kato が

完成、発表されている。この共同研究により、(非ネーター性を許す) 可換環の完備化について新たな知見を得た。より具体的には、完備な環を定義する定義イデアルが有限生成かつ Spectrum 上での補集合に対しネーター性を仮定するだけで多くの結果が拡張され、以前得られていた枠組みを広げた部分で基礎が確立することになった。この拡張により関手性が増し、より柔軟な道具を提供することが可能となった。また、リジッド幾何学には類似の理論として R. Huber の adic space の理論、V. Berkovich の Berkovich space の理論があり、重要部分は一致するものの、三つの理論の関係が極めて明快な形では説明されてはこなかった。この部分も我々の理論で明確に説明することができるようになった。とくに Berkovich 型の空間との関連を 接続空間に対する Stone の表現定理を拡張することによって確立することができた。これらのリジッド幾何学における研究については国際研究集会での招待講演でも解説を行い ([3], [5]) 公表に努めている。

非可換類体論ではガロア表現の変形理論 (deformation theory) を直接数論に応用する、という先行研究にない新たな知見が得られている。変形理論がラングランズ対応の研究に有効であることは、A. Wiles による谷山-志村予想の研究で既に確立したことであり、その後も発展し続けている。しかしながら、ラングランズ対応を経由せず、直接数論の問題に応用できるかどうかはわかっていなかった。研究代表者は以前より総実代数体に対する相対類数の奇素数 p による可除性 (indivisibility) をその最初の例として取り上げて来たが、応用上 p がその代数体で分岐している場合を含めることが重要となる。その場合を含めた結果を得、プレプリント 「Indivisibility of relative class numbers for quadratic extensions of totally real fields」を準備中である (招待講演 ([1]) でも公表している)。この中では

- ・ガロア表現のモジュラー性、特に楕円曲線を使った表現の構成
- ・Galois deformation ring の具体的な計算
- ・跡公式

が用いられるが、この三つを組み合わせる議論は先行研究には存在していない、新たな成果である。

分担者である高井は indivisibility の問題、特に二次拡大の数を具体的に下から評価する研究をしており、有理数体の Galois 拡大で p が大の時、評価を得た。予想される best possible な評価からはまだ遠いが、

Hilbert モジュラー形式の問題として捉え、それを楕円モジュラー形式に帰着して解く等の新たな視点を含んでいる。これは既にプレプリントとなっており、今後論文としての成果公表を予定している。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 6 件)

1. Fumiharu Kato, Anneau de deformation et conducteur superieur, Proc. Japan. Acad. Ser. A Math Sci., 査読有り, 88, 2012, 25-27

2. Lars Hesselholt, On a conjecture of Vorst, Math. Z., 査読有り, 270, 2012, 445-452

3. Kazuhiro Fujiwara, Ofer Gaber, Fumiharu Kato, On Hausdorff completions of commutative rings in rigid geometry, Journal of Algebra, 査読有り, 332, 2011, 293-321

4. Fumiharu Kato, Topological rings in rigid Geometry, LMS Lecture Notes Series, 査読有り, 283, 2011, 103-144

5. Thomas Geisser, Lars Hesselholt, On the relative and bi-relative K-theory of rings of finite characteristic, J. Amer. Math. Soc., 査読有り, 24, 2011, 29-49

6. Thomas Geisser, Lars Hesselholt, On the vanishing of relative K-groups, Math. Ann., 査読有り, 348, 2010, 707-736

[学会発表] (計 5 件)

1. Kazuhiro Fujiwara, Non-abelian class field theory and indivisibility of class numbers of number fields, Arithmetic and Algebraic Geometry 2013, 2013. 1.30, University of Tokyo

2. Yuuki Takai, Indivisibility of relative class numbers of CM quadratic extensions of totally real Galois fields, Korea-Japan Joint Seminar on Number Theory and Related Topics, 2013.1.24, Ewha Womans University

3. Kazuhiro Fujiwara, Valuations for

topological spaces, Arithmetic Week in Tokyo, 2012.6.5, University of Tokyo

4. Lars Hesselholt, The big de Rham-Witt complex, International Workshop on Motives in Tokyo, VI, 2010.12.13, University of Tokyo

5. Fumiharu Kato, Adic algebraic spaces of finite ideal type and rigid GAGA on algebraic spaces, 2011 Taiwan-Japan Workshop on Arithmetic Algebraic Geometry and Related Topics, 2011.11.18, Institute of Mathematics, Academia Sinica

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

名称 :
発明者 :
権利者 :
種類 :
番号 :
出願年月日 :
国内外の別 :

○取得状況 (計 0 件)

名称 :
発明者 :
権利者 :
種類 :
番号 :
取得年月日 :
国内外の別 :

[その他]

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

藤原 一宏 (FUJIWARA KAZUHIRO)

2009 年度-2012 年度

研究者番号 : 00229064

(2) 研究分担者

ヘッセルホルト・ラーズ (HESSELHOLT LARS)

名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・

教授

2010 年度-2012 年度

研究者番号：10436991

加藤 文元 (KATO FUMIHARU)
熊本大学・大学院自然科学研究科・教授
2010 年度-2012 年度

研究者番号：50294880

高井 勇輝 (TAKAI YUUKI)
東京大学・大学院数理科学研究科・研究員
2011 年度-2012 年度

研究者番号：90599698

ガイサ・トーマス (GEISSER THOMAS)
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・
教授
2010 年度-2011 年度
研究者番号：30571963

(3) 連携研究者

加藤 文元 (KATO FUMIHARU)
熊本大学・大学院自然科学研究科・教授
2009-2012 年度

研究者番号：50294880

小林 真一 (KOBAYASHI SHINICHI)
東北大学・大学院理学研究科・准教授
2009 年度-2012 年度

研究者番号：80362226

金銅 誠之 (KONDO SHIGEYUKI)

名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・教授

2009 年度-2012 年度
研究者番号：50186847

斉藤 秀司 (SAITO SHUJI)
2009 年度-2012 年度

東京大学・大学院数理科学研究科・教授
研究者番号：50153804

斉藤 毅 (SAITO TAKESHI)
2009 年度-2012 年度

東京大学・大学院数理科学研究科・教授
研究者番号：70201506

