

平成 26 年 5 月 30 日現在

機関番号：13901

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2009～2013

課題番号：21340014

研究課題名(和文) 離散群に関する諸問題の幾何学的手法による研究

研究課題名(英文) Study of problems on discrete groups by geometric methods

研究代表者

納谷 信(Nayatani, Shin)

名古屋大学・多元数理科学研究科・教授

研究者番号：70222180

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 13,000,000円、(間接経費) 3,900,000円

研究成果の概要(和文)： Gromovによって構成されたエキスパンダーの擬等長像を含む群がCAT(0)空間の大きなクラスに対して固定点性質を持つことを証明した。Margulis超剛性定理の幾何学的証明の試みと関連して、 $PGL(3, \mathbb{Q}_p)$ に付随する2次元ユークリッド的ビルディングのある幾何学的不変量の厳密値を決定することを目標に、 $p=2$ の場合を詳しく考察し、対応する多面体の変形問題について進展を与えた。離散群の剛性問題を背景として、強擬凸CR構造、四元数CR構造といった共形的幾何構造の研究を行い、いくつかの結果を得た。

研究成果の概要(英文)： We proved that Gromov's group containing quasi-isometric image of expanders has fixed-point property for a large class of CAT(0) spaces. In relation to the possible geometric proof of the Margulis superrigidity theorem, we studied a certain geometric invariant of the 2-dimensional Euclidean building associated to $PGL(3, \mathbb{Q}_p)$. In the case $p=2$, we made progress on the related deformation problem of polyhedral. Motivated by a certain rigidity problem on discrete groups, we studied conformal-geometric structures such as strongly pseudoconvex CR structures and quaternionic CR structures, and obtained some results.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：固定点性質 CAT(0)空間 ランダム群 不変量 非線形スペクトルギャップ

1. 研究開始当初の背景

研究代表者等は、単体的複体から CAT(0)空間への調和写像の類似物 -- 組合せ調和写像 -- を考えることにより、単体的複体の基本群であるような離散群 (典型例は p 進数係数代数群の格子) の超剛性・固定点性質を研究する新しい手法を確立していた。また、より最近の研究において、上記の手法を定義空間が離散群に付随するケーリー複体 (これは単体的複体とは限らない) である場合に一般化し、ランダム群に対する固定点定理を得ていた。これはズックによるランダム群がカズダンの性質(T)をもつという結果を大きく一般化したものである。

2. 研究の目的

Gromov によって構成されたエクスパンダーの擬等長像を含む群がどの程度広いクラスの CAT(0)空間に対して固定点性質をもつかを明らかにするとともに、具体的にどのような CAT(0)空間がこのクラスに属するかを調べる。また、 p 進数係数代数群の格子に対する Margulis 超剛性定理の幾何学的証明の試みと関連して、 $PGL(n, \mathbb{Q}_p)$ に付随するユークリッド的ビルディングのある幾何学的不変量を計算・評価する。さらに、離散群の剛性問題を背景として、強擬凸 CR 構造、四元数 CR 構造について研究する。

3. 研究の方法

Gromov の群はグラフモデルランダム群のある意味での極限として与えられるので、グラフモデルランダム群に対して我々が確立していた固定点定理が使える。 $PGL(n, \mathbb{Q}_p)$ に付随するユークリッド的ビルディングのある幾何学的不変量を計算する問題は、多面体の変形問題に帰着されると考えられるので、まず、後者の問題の解決を目指した。強擬凸 CR 多様体の Rumin 複体に対するシャープなボホナー型公式が確立できると、ある剛性問題の幾何学的証明が可能になるので、そのような公式を確立することを目指した。

4. 研究成果

(1) ランダム群の固定点性質の研究

グラフモデルのランダム群が、ある幾何学的不変量 (以前に井関氏との共同研究において導入したもので、 $[0,1]$ に値をとる。)が 1 より小さい定数によって上から押さえられている CAT(0)空間のクラスに対して、固定点性質をもつという結果を得ていた。一方、Gromov は、エクスパンダーの擬等長埋め込みを許容する群の存在を主張したが、最近になって Arzhantseva-Delzant が詳細な存在証明を与えた。そこで、Gromov の群の固定点性質について考察し、我々の上述の結果を使って、この群が 1 より小さい CAT(0)空間のクラスに対して固定点性質を持つことを示した。このクラスはすべての A_n 型ユークリッド的ビルディングを含むので、とく

に、Gromov の群が線形群の部分群になり得ないことが従う。以上の成果を取りまとめて専門誌に発表した。この研究は、井関裕靖氏(東北大学)、近藤剛史氏(神戸大学)との共同研究である。

なお、Naor-Silberman は、我々とほぼ同時期に、一般に p -様凸空間($p \geq 2$)の場合に我々の結果と同様の結果を得た。(CAT(0)空間は 2-様凸空間である。) CAT(0)空間の場合に限ると、我々の証明は Naor-Silberman のそれより幾何学的かつ簡明であり、我々の証明を p -様凸空間の場合に一般化することを目指した。Naor-Silberman の証明を詳細に検討することにより、解決すべき問題点はある程度明らかにできたので、今後研究を継続する。

(2) 不変量 の 厳密値の研究

非アルキメデス的な場合のマルグリス超剛性の幾何学的証明という問題と関連して、 $PGL(3, \mathbb{Q}_p)$ に付随する 2 次元ユークリッド的ビルディングの頂点における接錐の不変量 の厳密値を決定することを目指し、 $p=2$ の場合を詳しく考察した。この不変量は、接錐上の有限台確率測度に対して定まる量の、測度全体にわたっての上限として定義される。 $p=2$ の場合、問題は、与えられた測度に応じて、 $PGL(3, \mathbb{F}_2)$ に付随する 1 次元球面的ビルディング(頂点数は 14)の R^{14} への局所等長的な埋め込みを適切に構成する問題として定式化される。頂点集合上に台にもつ重み一定の測度の場合には、そのような埋め込みで最良のものを井関氏との以前の共同研究において構成したが、これは R^7 への埋め込みとなっている。我々の問題は、この埋め込みをずっと退化した R^3 への埋め込みまで適切に変形する問題に帰着すると期待し、まずは適切な変形を見いだすべく研究を進めた。そして、この変形が R^7 内で起こると仮定し、埋め込みに対応する半正値行列を具体的に決定することを目指した。ここで、 R^3 への埋め込みを一つ固定したとき、行列の成分は 1 変数関数として与えられると仮定している。埋め込みの対称性を仮定することにより、未知パラメータ(関数)は 9 個になるが、表現論を用いることにより、さらに 5 個まで減らすことができた。さらに数値計算により、2 個のパラメータは 1 次関数であることが分かり、あと 3 個のパラメータを決定すればよいという状況である。この研究は、豊田哲氏(名古屋大学)との共同研究である。

(3) 四元数 CR 幾何の研究

以前に与えていた四元数 CR 構造の定義を一般化して、四元数多様体の任意の実超曲面にそのような構造が自然に定まるようし、以前の定義の下で確立していた Tanaka-Webster 接続の類似の構成も一般化した。さらに、四元数 CR 構造と、Biquard の導入した四元数接触構造の相違について

研究を行い、以下の知見を得た。

1. 四元数接触構造は四元数 CR 構造に拡張することができ、しかも標準的な拡張の仕方がある。

2. 四元数接触構造の拡張であるような四元数 CR 構造を特徴付けることができる。とくに、四元数接触構造の拡張となり得ない四元数 CR 構造が存在する。

3. 四元数接触構造の四元数 CR 構造への標準的な拡張の場合に、Biquard 接続と我々の田中-ウェブスター接続の四元数的類似は、ある余階数 3 の部分束上の部分接続として一致する。

また、以上をふまえてプレプリントを全面的に書き改め、専門誌に発表した。この研究は、鎌田博行氏(宮城教育大学)との共同研究である。

(4) 強擬凸 CR 多様体の Rumin 複体の研究

強擬凸 CR 多様体の Rumin 複体に対するシャープなボホナー・ワイツェンベック型公式を書き下すことを目標に研究を行った。動機は、複素クライン群に関するある剛性定理を微分幾何的手法によって証明するという問題にある。Rumin 自身が一般の次数において書き下した公式はシャープではないため、剛性問題のような繊細な問題に応用することはできない。まず 1 形式の場合を検討したが、この場合にのみ、Rumin が別にボホナー・ワイツェンベック型公式を書き下しており、この公式は実際にシャープであることが確認できた。すなわち、ある空間(S^1 上の球面束、コホモロジー非消滅)が、消滅のボーダーラインに位置する(すなわち、コホモロジー消滅のための曲率減率条件を等号付きで満たす)ことが確かめられた。また、この空間に対して、Rumin 調和 1 形式を明示的に求めることができ、それが S^1 の体積形式の引き戻しに一致することを確認した。また、シャープ性の応用として、劣ラプラシアン固有値のシャープな評価(Greenleaf が 1985 年に証明を発表したが、後に誤りが指摘され、2013 年に Li-Wang が正しい証明を与えた。)の極めて簡明な別証明が得られた。現在、等号成立の場合を考察している。

一般次数の場合にも、剛性定理のモデル空間(閉双曲多様体上の球面束)が、消滅のボーダーラインに位置し、Rumin 調和形式が閉双曲多様体の体積形式の引き戻しに一致すると期待される。これをまずは 2 形式の場合に確認すべく研究し、一つの実パラメータを決定すればよいというところまで進めたが、いずれかのパラメータに対して公式が実際にシャープになるかは未解明であり、今後の課題である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 6 件)

1. 鎌田博行, 納谷信, Quaternionic CR geometry, Hokkaido Mathematical Journal 42 (2013), 159--207, 査読あり.

2. 井関裕靖, 近藤剛史, 納谷信, N-step energy of maps and fixed-point property of random groups, Groups, Geometry, and Dynamics 6 (2012), 701--736, 査読あり.

3. 近藤剛史, CAT(0) spaces and expanders, Mathematische Zeitschrift 271 (2012), 343--355, 査読あり.

4. 井関裕靖, 納谷信, An approach to superrigidity and fixed-point theorems via harmonic maps, Selected papers on analysis and differential equations, AMS Translations, Series 2, 230 (2010), 135--160, 査読あり.

5. 納谷信, 調和写像と超剛性・固定点性質, 数理解析研究所講究録 1720 (2010), 112—138, 査読なし.

6. 井関裕靖, 近藤剛史, 納谷信, Fixed-point property of random groups, Annals of Global Analysis and Geometry 35 (2009), 363--379, 査読あり.

[学会発表](計 41 件)

1. 納谷信, Rumin-Bochner formula for 1-forms on a CR manifold, The second Japanese-Spanish workshop on Differential Geometry, 東京工業大学, 2014.

2. 鎌田博行, Quaternionic CR structure, Progress of geometric structures on manifolds, 名城大学幾何学研究集会, 名城大学, 2014年3月.

3. 納谷信, 離散群の剛性への幾何学的アプローチ--個々の群からランダム群へ, 談話会, 東北大学, 2013.

4. 納谷信, Fixed-point property of infinite groups, The 5th OCAMI-TIMS Joint International Workshop on Differential Geometry and Geometric Analysis, 大阪市

立大学, 2013.

5. 納谷信, Mendel-Naor, "Expanders with respect to Hadamard spaces and random graphs"の第3節の解説, 勉強会「非線形スペクトルギャップとエクパンダー」, サンヒルズ三河湾, 2013.

6. 納谷信, Rumin 複体に対するシャープなボホナー公式を目指して, 福岡大学微分幾何研究会, 福岡大学セミナーハウス, 2013.

7. 納谷信, Rumin 複体に対するシャープなBochner 公式を目指して, 距離の幾何学探求勉強会, 琵琶湖コンファレンスセンター, 2013.

8. 納谷信, Fixed-point property of infinite groups, Discrete Geometry and Dynamical Systems, 京都大学, 2013.

9. 納谷信, 四元数 CR 幾何, 東大複素解析幾何セミナー, 東京大学, 2012.

10. 鎌田博行, 四元数 CR 構造について, シンプレクティック幾何とその周辺2012, 放送大学秋田学習センター, 2012年11月.

11. 井関裕靖, ランダム群の L^p 空間に対する固定点性質, 福岡大学微分幾何研究会, 福岡大学セミナーハウス, 2012年11月3日.

12. 納谷信, Quaternionic CR geometry, 第18回複素幾何シンポジウム, 信州菅平高原ブチホテルゾントック, 2012.

13. 近藤 剛史, 豊田 哲, 木の非線形スペクトルギャップ, 日本数学会 2012 年度年会, 東京理科大学神楽坂キャンパス, 2012年3月28日.

14. 近藤 剛史, Poincare inequality and fixed point property of isometric group actions, Group actions and K-theory, 京都大学数学教室, 2012年3月15日.

15. 近藤 剛史, Wirtinger の不等式と非線形スペクトルギャップ, 淡路島幾何学研究集会 2012, 南あわじ市松帆古津路国民宿舎慶野松原荘, 2012年1月28日.

16. 納谷信, 幾何の対象のとしての群, 名古屋

大学数学教育セミナー, 名古屋大学, 2011.

17. 近藤 剛史, ポアンカレ不等式と $CAT(0)$ 空間, 多様体上の微分方程式, 金沢大学セライトプラザ, 2011年11月12日.

18. 納谷信, Quaternionic contact/CR geometry, 福岡大学微分幾何研究会, 福岡大学セミナーハウス, 2012.

19. 納谷信, Deformation of polyhedra towards Margulis superrigidity, 極小曲面と幾何構造, 名城大学, 2012.

20. 納谷信, Deformation of polyhedra towards Margulis superrigidity, 福岡大学微分幾何研究会, 福岡大学セミナーハウス, 2011.

21. 井関裕靖, Coxeter polyhedra in hyperbolic spaces, 福岡大学微分幾何研究会, 福岡大学セミナーハウス, 2011年11月6日.

22. 近藤 剛史, 有限グラフの非線形スペクトルギャップ, 第58回幾何学シンポジウム, 山口大学 吉田キャンパス, 2011年8月28日.

23. 納谷信, 離散群の剛性への幾何学的アプローチ, 仙台シンポジウム, 東北大学情報科学研究科, 2011.

24. 井関裕靖, ランダム群の固定点性質, 仙台シンポジウム, 東北大学情報科学研究科, 2011年8月18日.

25. 近藤 剛史, $CAT(0)$ spaces and nonlinear spectral gap, Long Term Workshop Geometry and Analysis, 京都大学, 2011年3月16日.

26. 近藤 剛史, 距離空間のマルコフタイプ, 淡路島幾何学研究集会 2011, 南あわじ市松帆古津路国民宿舎慶野松原荘, 2011年2月10日.

27. 納谷信, Quaternionic CR geometry, Workshop on Parabolic Geometry, 東京大学玉原セミナーハウス, 2010.

28. 納谷信, 四元数 CR 幾何における可積分性, 福岡大学微分幾何研究会, 福岡大学セミナーハウス, 2010.

29. 井関裕靖, 同変写像のエネルギーと有限生成群の剛性, 福岡大学微分幾何研究会, 福岡大学セミナーハウス, 2010年10月9日.
30. 近藤 剛史, 特異な $CAT(0)$ 空間, 日本数学会 2010 年度秋季総合分科会, 名古屋大学, 2010年9月25日.
31. 納谷信, 調和写像と超剛性・固定点性質, 調和写像論の深化と展望, 京都大学数理解析研究所, 2010.
32. 近藤 剛史, スケール極限による固定点定理, 調和写像論の深化と展望, 京都大学数理解析研究所, 2010年6月3日.
33. 近藤 剛史, Generalized polygon の歪み, 日本数学会 2010 年度年会, 慶應義塾大学 矢上キャンパス, 2010年3月25日.
34. 近藤 剛史, 有限生成群のヒルベルト空間への等長作用と性質 (T), トロピカル幾何と超離散系の新展開, 京都大学, 2010年3月10日.
35. 近藤 剛史, Random groups and scaling limit argument, 第 5 回日中友好幾何学研究集会, OIST (沖縄科学技術研究基盤整備機構) Seaside House, 2010年1月30日.
36. 納谷信, 離散群の剛性と非正曲率空間の幾何, 筑波大学数学系月例談話会, 筑波大学, 2010.
37. 近藤 剛史, スケール極限を用いた離散群の固定点定理, 確率論と幾何学, 京都大学, 2010年1月8日.
38. 納谷信, $CAT(0)$ 錐の不変量 について, 福岡大学微分幾何研究会, 福岡大学セミナーハウス, 2009.
39. 井関裕靖, ランダム群の固定点性質, 福岡大学微分幾何研究会, 福岡大学セミナーハウス, 2009年11月22日.
40. 近藤 剛史, Isometric group action on Hilbert spaces, Discrete Geometry related to Groups and Dynamics, 愛媛大学, 2009年9月1日.
41. 井関裕靖, ランダム群の固定点性質, 第

56回幾何学シンポジウム, 佐賀大学, 2009年8月28日.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

納谷 信 (NAYATANI SHIN)
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・教授
研究者番号: 70222180

(2) 研究分担者

()

研究者番号:

(3) 連携研究者

金井雅彦 (KANAI MASAHIKO)
東京大学・大学院数理科学研究科・教授
研究者番号: 70183035

小谷元子 (KOTANI MOTOKO)

東北大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号: 50230024

内藤久資 (NAITO HISASHI)

名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・准教授

研究者番号: 40211411

井関裕靖 (IZEKI HIROYASU)

慶應義塾大学・理工学部・教授

研究者番号: 90244409

鎌田博行 (KAMADA HIROYUKI)

宮城教育大学・教育学部・教授

研究者番号: 00249799

小林俊公 (KOBAYASHI TOSHIMASA)

摂南大学・工学部・講師

研究者番号: 30399125

糸健太郎 (ITO KENTARO)

名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・准教授

研究者番号: 00324400

近藤剛史 (KONDO TAKEFUMI)

(平成24年3月まで)

神戸大学・大学院理学研究科・GCOE 博士研究員

研究者番号: 60467446