

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 5 月 22 日現在

機関番号：34315

研究種目：基盤研究（B）

研究期間：2009 ～ 2011

課題番号：21340024

研究課題名（和文） ファイナンスにおけるジャンプ型モデルの数値解析とマリアバン解析の応用

研究課題名（英文） Numerical Analysis of Jump-Models and Applications of Malliavin Calculus in Finance

研究代表者

アルトゥーロ コハツ・ヒガ（ARTURO KOHATSU-HIGA）

立命館大学・理工学部・教授

研究者番号：80420412

研究成果の概要（和文）：

本研究では、主に Malliavin 解析や作用素分解法を使いジャンプ型確率微分方程式解のシミュレーション方法について研究を行った。新シミュレーション方法を発見し、数学的な性質について結果を得た結果、従来の方法に比べ正確で素早く計算できる方法を発見した。また、数理ファイナンスモデルでよく使用されるジャンプ型確率微分方程式は、リスクを計るために Greeks と呼ばれる量を計算しなければならない。この分野におけるさまざまな無限次元部分積分公式により計算式が得られシミュレーションを行った。アジアン型確率変数に対しての密度関数の下からの評価を得られて、これからフィルテリングに対しての応用を考えています。

研究成果の概要（英文）：

In the present project, we applied Malliavin Calculus and operator decomposition techniques to study various problems in applied mathematics. In particular, we provided new simulation techniques for the approximation of solutions of stochastic differential equations driven by jumps. We studied the mathematical properties of these methods and proved that they provide a more accurate and fast method in comparison with past methods of simulation. This type of equation is also used as a model in Mathematical Finance. In this area we provided various formulas for the so called Greeks which measure risk in financial products. Through the use of the infinite dimensional integration by parts formula, we provide various alternatives and we also provided simulations to show the applicability of the results. We also obtain a lower bound estimate for Asian type random variables. We are thinking of applying these results to various problems in filtering.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009 年度	3,100,000	930,000	4,030,000
2010 年度	2,300,000	690,000	2,990,000
2011 年度	2,300,000	690,000	2,990,000
年度			
年度			
総計	7,700,000	2,310,000	10,010,000

研究分野：数物系化学

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：シミュレーション・確率微分方程式・ジャンプ型モデル・Malliavin 解析・確率変数・リスク・誤差評価・非線形

## 1. 研究開始当初の背景

### 確率微分方程式の近似理論

確率微分方程式(以下、SDE と記す)は物理や工学、経済学などで度々用いられる。実際に応用するためには、その方程式を解かなければならない。しかし、具体的に解くことのできる方程式は少ないため、シミュレーションを行って近似解を得ることが標準的な方法になっているが、この時「近似」の精度を比べるために誤差の評価が必要になる。Euler-丸山近似と呼ばれる手法では、多くの結果が得られている。一方、作用素分解により高次弱近似を構築された新シミュレーション方法がある。この方法に対しての[2](参考文献の[2]を参照)において、基本性質については調べられている。しかし、この手法における性質の研究は初期段階でまだ調べなくてはならないことが多数ある。その中で Levy 過程に対するシミュレーション方法[1]では、有限時間でジャンプの数は有限である必要がある。この方法では大きいジャンプに関するシミュレーションを行った後、ブラウン運動を用いて小さいジャンプを計算し、近似解を得る。しかし、この方法ではジャンプの数が多いうちに計算時間が非常に長くなる。

### Malliavin Calculus 数理ファイナンスへの応用

P.L. Lions 氏等[5]によって、1999年に Malliavin 解析の意味での部分積分公式(以下、IBP=integration by parts)を用いて、Greeks と呼ばれるオプション価格のパラメータ依存度を表すリスク量に対する Monte Carlo 法による導出方法が構築された。この方法を多くの研究者が様々な場合に拡張しようとしているが、いくつか重要な問題がまだ残っている。例えば、多資産からなるオプションの Greeks をこの方法で行うと分散が大きくなってしまふ問題がある。KDE を用いた方法(差分法の拡張)についてあまり研究されていない。

またこれまでに、Wiener 空間上で IBP を使った Greeks などの導出、研究は多数行われてきた。しかし、ジャンプ型のファイナンスモデル(以下、ジャンプ型モデルと記す)に対してはあまり研究されてこなかった。特に、一般の Levy 過程に対する IBP が限られた条件下でしか結果が得られていないため、Greeks の導出は非常に困難な問題であり、挑戦的な試みである。

### 密度関数の下からの評価

Malliavin 解析を使って、密度関数の性質が調べられることはよく知られている。例えば、Wiener 空間上の確率変数の密度関数に対して、上と下から楕円型の評価を仮定すると様々な応用が考えられる(例えば、[6])。漸近

統計学では、この評価が存在すると最尤推定量(MLE)の漸近的性質が正規分布の場合とほぼ同じになることが知られている。ポテンシャル論でも脱出確率、エルゴード性など同様の結論が導き出される。そのため、楕円型評価の仮定が重要であるとなってくる。特に、密度関数の下からの評価は楕円型の場合しか知られていない。従って、応用する際は一樣楕円型を仮定することが標準となっている。しかし、応用問題では楕円型の仮定を満たさないこともしばしばある。この研究では楕円型でない場合(準楕円型)に対して、密度関数の下からの評価を考える。

## 2. 研究の目的

### 確率微分方程式の近似理論

本研究ではジャンプ型モデルに対するシミュレーション方法の構築や数値解析を行うことを目的とする。

(1) 有限時間内に空間でのジャンプの数が無限回可能である場合を検討する。この時、Asmussen et al.[4]の方法を適用する。しかし[4]では、SDE の係数が定数の場合しか結果が得られていない。従ってまず、一般化した係数の場合の証明を与える。

(2) 次の現象を証明する予定である。弱近似の意味で「どの程度のジャンプまで考慮してシミュレーションを行ってやる必要があるか」という問いに対して数値実験を行った。その結果は意外なものであった。実際、ジャンプ幅が0の近傍で Levy 測度が無限となる場合は、ある程度ジャンプのシミュレーションを行わなくても近似の精度が悪くならないことが判明した。この実験結果に対する数学的な証明を検討する。

上の(1)と(2)が Tempered stable や stable の場合でも拡張できるのか検討する。また、Asmussen-Rosinski の提案以外なシミュレーション方法があるかについて検討する。

### Malliavin Calculus 数理ファイナンスへの応用

(1) ジャンプ型モデルの Greeks の計算方法について研究する。従って、ファイナンスで使われている Levy 過程に対して、Greeks の計算方法と IBP に関して研究する。また分散減少法として、[6]の Localization 法を拡張する。経路依存型オプション(例えば、Look-back や Bermudan オプション)への応用も検討する。

(2) Malliavin-Thalmaier 法と呼ばれる密度関数のシミュレーション法に関して解析を行った。この方法を用いると従来の Malliavin 解析を用いた方法に対して分散減少効果があることが確認されている。次のステップとして、最適な近似パラメータの選択法を数学的に求め、更にシミュレーションに

より必要となる定数を求めることを検討する。また、更なる分散減少法や加重サンプリング法を構築し、可能であればどのような条件で必ず分散が減少させられるかを示す。

#### 密度関数の下からの評価

本研究ではまず、具体的な問題に対して明確に最良の評価を書くことを試みる。例えば、ファイナンスのモデルの中では、アジア型オプションから生じるモデルが考えられる。このモデルでは、楕円型ではないため、一般的に密度関数の下からの評価は知られていない。M. Yor 氏が係数が定数の場合のみ密度関数の具体的な評価を与えた。ここでは、ランダムな係数の場合でも同様の結果を期待している。また、多次元の場合も同様のランダム係数の問題について研究する。統計などへの応用も考える。

### 3. 研究の方法

**要旨** 各テーマをグループに分かれて研究を進めていく。国内や海外で活発に研究発表を行い多くの指摘を受けられるようにする。また逆に、セミナーを開催し外国研究者を招待し、議論する場を多く持てるようにする。その際、情報交換を行い、多くの指摘を得てより発展させる。

#### 確率微分方程式の近似理論

平成 21 年度：

多次元確率変数の密度関数のシミュレーション方法を確立し (Malliavin-Thalmaier 法) その性質を調べた後、実際のシミュレーションの精度を検討する。特に、誤差についての中心極限定理が先行研究で得られているので、この定理を用いてシミュレーションのパラメータを求める。また、多資産のオプションに関する Greeks 計算に適用し、その精度を検討する。

経路依存型オプションに関する Greeks の計算は Malliavin-Thalmaier 法では難しいため、別の確率的表現を使い考察する。特に楠岡近似の作用素を分解する手法を適用する。Asmussen-Rosinski による方法では、ジャンプに対するシミュレーションを 2 段階で行う。最初にある小さい数字  $a$  より小さいジャンプを無視してシミュレーションを行う。この段階まででは [1] のシミュレーション方法になる。Asmussen-Rosinski の方法では、その後、 $a$  より小さいジャンプの代わりに適当な独立であるブラウン運動を用いる。この方法で得られた SDE の近似解に対する誤差評価について研究を行う。この結果が得られた後、 $a$  の最適な選び方が得られる方法について考察する。

ジャンプ型 SDE に対する解析方法として、楠岡近似で用いられる生成作用素を分解する方法がある。

平成 22 年度：

平成 21 年度に確立した計算法に対して具体的な例で精度を計る。その際、分散減少法と加重サンプリング法の導入を検討する。また、ジャンプ型 SDE に対しても計算法を構築し、そのシミュレーションを行う。

楠岡近似により作用素を分解する。その近似された作用素に対応する過程は、これまで互いに独立なものとして構成を考えられてきたため、相関を持つ過程の表現はあまり判明されていない。[8] では初めて共分散がある作用素分解表現が提案された。共分散がある作用素分解表現を用いた数値実験を行う。また、その性質に対して数学的な証明を与える。

平成 21 年度に提案した近似法に関してシミュレーションを行う。また同時に、分散減少法と加重サンプリング法を検討する。更に、ファイナンスへの応用として経路依存型のオプションに関して近似法を構築し、その理論的な性質を証明し、数値実験を行い精度に関して検証する。

平成 23 年度：

ジャンプ型モデルに対して、楠岡近似を使って Greeks の計算ができるかを検討する。また、連続部分とジャンプ部分の組み合わせについて検討する。

#### Malliavin Calculus — 数理ファイナンスへの応用

平成 21 年度：

Subordinated Wiener 型モデルに関して部分積分公式を作り、Monte Carlo 法によるシミュレーションを実現した。また、Escher 変換法を使った Greeks の表現を与えた。この方法を用いた Greeks と他の手法を用いたものとを比べる。例えば Levy 過程の増分の分布を使った Greeks 計算を検討し、比較する。ヨーロッパ型オプションの場合では Escher 変換法の精度がいいと思われる。一方、径路依存型オプションでは増分の分布を用いた方が適していると思われる。

Greeks の計算と部分積分公式は深く結び付いているが同値ではない。上記のグループで証明された Greeks の式が部分積分公式とどのように関係しているかを調べる。また更に、密度関数の下からの評価を検討する。

平成 22 年度：

平成 21 年度に提案された Greeks 公式を使い、ファイナンスにおける様々な商品について適用し、その結果を検討する。特に [7] と [8] で提案された分散減少法をジャンプ型モデルから成るオプションへの拡張を行う。そのシミュレーションも行う予定である。

Greeks 計算を行うときに増分の分布を用いた表現を与える。ただし、計算過程で変数変換を行うことで、Greeks の表現が変わってくる。その中で分散減少効果の高い表現についての考察を行なう。

平成 23 年度：

Greeks の公式が連続部分を基礎したものとジャンプ部分を基礎したものがあり、シミュレーションの観点からどう組み合わせれば分散が小さくなることについて検討する。

#### 密度関数の下からの評価

平成 21 年度：

アジア型 SDE は多次元拡散過程の一つの過程の拡散係数が 0 であるという特徴を持つ。この SDE は楕円型ではなくて準楕円型となる。2 次元拡散過程の係数が定数であるときに M. Yor 氏の具体的な結果があり、密度関数の下から評価が与えられている。この結果に対して制御理論を基として最適な径路を見つけ、Malliavin 解析を用いて密度関数の下からの評価を得る。また、多次元の場合に関しても下からの評価を導く。ただし、その評価は正規分布系でないもので表現される。平成 22 年度も継続してこの部分の研究を行う。

シミュレーションにより SDE のパラメータ推定の実験を行い、その精度を検証する。同時に、近似過程の推移確率密度関数の下からの評価を導き、推定量に対する漸近的性質を求める。

平成 22 年度：

平成 21 年度の研究を踏まえて一般の準楕円型拡散過程に対しても、密度関数の下からの評価を検討する。1 次元 Black-Scholes モデルは対数正規分布に従うことがよく知られている。しかし、一般の互いに作用しあう多次元線形 SDE の解の密度関数は具体的に書けないため、上と下からの評価が必要である。Malliavin 解析を用いて、Cramer-Rao 不等式の証明を与える。ジャンプ型の SDE に対しても推定量を算出し、その漸近的性質を調べる。

平成 23 年度：

平成 22 年度に作った推定量をジャンプ型モデルに適用し、更に実際のデータを使いパラメータ推定を行う。シミュレーションを用いて計算した推定量とスコア関数から取り出した推定量を比べる。それらの結果を見て、ファイナンスでのキャリブレーション問題として応用する。

#### 4. 研究成果

##### 確率微分方程式の近似理論

ジャンプ型確率微分方程式に関していくつかの新計算方法を提案した(雑誌論文)。提案した方法を使い、シミュレーションを行った。これによって Levy 測度が無限である時にも使える事が分かった。主な考え方として作用素分解法を用いる。

##### Malliavin Calculus — 数理ファイナンスへの応用

連続過程の場合における多次元の密度関数の近似方法を提案し、金融リスク量の Greeks

計算の時に用いた。この理論の結果とシミュレーションの結果について様々な論文にまとめた。ここで使った方法としては Malliavin-Thalmaier 公式である。ただし、この計算方法を使うと分散が発散してしまうため核推定方法を用いた。この方法ではパラメータの調整について研究を行い、数学的な結果を得られた。この結果を使い、正パラメータ選択が可能となった。

また、この方法が Bayes タイプの推定で使うときは誤差評価の問題が発生するが、その時のパラメータ調整の問題についても解決している。

ジャンプ型確率微分方程式の Greeks 計算のためにまず、ブラウン運動を基礎とした部分積分公式を得た。数理ファイナンスモデルでは Subordinated Brownian motion を元にしたモデルが多いため、いろんな応用があると思われる。その次に Escher 変換を元にした部分積分公式を得て、Greeks の計算方法として提案した。その次にジャンプの部分と連続部分を使ったが、前より正確な方法であると同時に計算時間が長くなることが予想されるが場合によって必要な公式であり、数学の観点から必要性がある理論についても今後も展開を進めることにしている。

##### 密度関数の下からの評価

Asian 型確率変数に対して密度関数の下からの評価が得られたので、フィルタリングの問題に適用を行った。この設定では拡散係数が準楕円であり、密度関数の滑らかさにも疑問が考えられたため、この問題を展開するためにまず、シグナルの係数が滑らかではない時、その積分の密度関数の性質について研究を行った。結果として、シグナルの積分の密度関数が滑らかであることを証明した。今後はシグナルの密度関数自体が滑らかではない場合について証明することを目的とする。また、ジャンプ型確率微分方程式の密度関数の下と上からの評価を得られた。この評価は空間に関して非常にいい評価である。しかし時間に対して、より正確な評価があるかどうか現在検討中である。また、この結果により統計量の性質がわかるかどうか将来の課題である。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 37 件)

著者名：A. Kohatsu-Higa, A. Tanaka,  
論文表題：A Malliavin Calculus method to study densities of additive functionals of SDE's with irregular drifts. 雑誌名：To appear in Annales de l'Institut Henri Poincare、査読：有、発

行年：2011

著者名：B. Jourdain, A. Kohatsu-Higa、  
論文表題：A review of recent results on  
approximation of solutions of  
stochastic differential equations. 雑誌  
名：Proceedings of the Workshop on  
Stochastic Analysis with Financial  
Applications: Hong Kong 2009.  
Birkhauser 2011. 査読：有、  
著者名：A. Kohatsu-Higa, P. Tankov 論文  
標題：Jump-adapted discretization  
schemes for Levy-driven SDEs、雑誌  
名：Stochastic Processes and their  
Applications、査読：有、巻：Vol.120、  
発行年：2010、ページ：2258-2285  
著者名：R. Kawai, A. Takeuchi、論文  
標題：Greeks formulas for an asset  
price model with gamma processes、  
雑誌名：Mathematical Finance 査読：  
有、巻：21(4)発行年：2011、ページ：  
723-742.

著者名：V. Bally, A. Kohatsu-Higa、論文  
標題：Lower bounds for densities of  
Asian type stochastic differential  
equations. Journal of Functional  
Analysis、巻：Volume 258, Issue 9, 1,  
発行年：2010、ページ：3134-3164

著者名：R. Kawai, A. Kohatsu-Higa、  
論文標題：Computation of Greek and  
multidimensional density estimation  
for asset price models with  
time-changed Brownian Motion 雑誌  
名：Applied Mathematical Finance、査  
読：有、発行年：2010、ページ：  
1466-4313

[学会発表](計 23 件)

発表者名：A. Kohatsu-Higa、発表標題：  
Approximations for SDEs driven by  
Levy processes、学会名等：Workshop  
Rough Paths and Numerical  
Integration Methods、発表年月日：  
2011年9月21-23日、発表場所：Marburg  
(Germany)

発表者名：S.Kusuoka、発表標題：  
Numerical Computation for the  
Expectation on Diffusion Processes、学  
会等名：ICIAM 2011 (International  
Congres on Industrial、発表年月日：  
2011年7月21日、発表年月日：バンク  
ーバー(カナダ)

発表者名：S.Ninomiya、発表標題：  
Higher-order weak approximation  
algorithms for SDEs: Some trials on  
barrier option problem and higher  
order algorithms" (with Shigeo  
Kusuoka and Mariko Ninomiya)、学会

等名：Stochastic PDEs、発表年月日：  
2011年9月12日-16日、発表場所：  
Zurich (Swiss)

発表者名：A. Kohatsu-Higa、発表標題：  
A Malliavin Calculus method to study  
SDE's with irregular drifts、学会名等：  
INRIA, Sophia-Antipolis, Tosca project  
seminar、発表年月日：2011年2月  
11日、発表場所：Sophia Antipolis  
(France)

発表者名：A. Kohatsu-Higa、発表標題：  
A Malliavin calculus method to study  
densities of additive functionals of  
SDE's with irregular drifts、学会名等：

IMPACT-Workshop in honour of  
P.Imkeller's 60<sup>th</sup> birthday、発表年月  
日：2011年2月26日、発表場所：Berlin  
(Germany)

発表者名：A. Kohatsu-Higa、発表題目：  
Methods to Deal with Non-smooth  
Coefficients in Malliavin Calculus、学  
会名等：International Conference on  
Malliavin Calculus and Stochastic  
Analysis. An event in honor of  
Professor David Nualart、発表年月  
日：2011年3月19日、発表場所：Kansas  
(America)

発表者名：H.Nagai、発表題目：H-J-B  
equations with quadratic growth  
Hamiltonian in stochastic control and  
mathematical finance、学会名等：Ajou  
Conference on Control Theory and  
Financial Engineering in honor of  
Professor Bensoussan、発表年月日：  
2010年7月8-10日、発表場所：Ajou  
(Korea)

発表者名：M.Yamazato、発表標題：  
Absolute continuity of  
multidimensional infinitely divisible  
distributions and applications、学会等  
名：Workshop & spring school on  
stochastic calculus and applicaiotns、  
発表年月日：2010年4月15日、発表場  
所：Sinica (Taiwan)

6 . 研究組織

(1)研究代表者

コハツ-ヒガ アルトゥーロ (ARTURO  
KOHATSU HIGA)  
立命館大学・理工学部・教授  
研究者番号：80420412

(2)研究分担者

赤堀 次郎 (AKAHORI JIRO)  
立命館大学・理工学部・教授  
研究者番号：50309100

長井 英生 (NAGAI HIDEO)  
大阪大学・基礎工学研究科・教授  
研究者番号：70110848

(3)連携研究者

會田 茂樹 (AIDA SHIGEKI)  
東北大学・理学部・教授  
研究者番号：90222455

楠岡 成雄 (KUSUOKA SIGEO)  
東京大学・数理(科)学研究科(研究院)・  
教授  
研究者番号：00114463

二宮 祥一 (NINOMIYA SHOICHI)  
東京工業大学・大学院イノベーションマネ  
ジメント研究科・教授  
研究者番号：70313377

河合 玲一郎 (KAWAI REIICHIROU)  
Department of Mathematics  
University of Leicester・  
Lecturer  
研究者番号：20464258

竹内 敦司 (TAKEUCHI ATSUSHI)  
大阪市立大学・理学(系)研究科(研究院)・  
准教授  
研究者番号：30336755

山里 眞 (YAMAZATO MAKOTO)  
琉球大学・理学部・教授  
研究者番号：00015900

安田 和弘 (YASUDA KAZUHIRO)  
法政大学・理工学部・助教  
研究者番号：80509638