様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ６ 月 １１ 日現在

機関番号：１４３０１
研究種目：基盤研究(B)
研究期間：2009～2013
課題番号：２１３４００３０
研究課題名（和文）無限次元確率解析と幾何学

研究課題名（英文）Infinite dimensional stochastic analysis and geometry

研究代表者
重川　一郎（Shigekawa, Ichiro）

京都大学・理学（系）研究科（研究院）・教授

研究者番号：００１２７２３４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　12,900,000円、（間接経費）　3,870,000円

研究成果の概要（和文）：主に、マルコフ過程を確率解析の手法で研究した。ここではマルコフ過程に付随する半群の挙動について主に調べた。まずリーマン多様体上の拡散過程を、半群の構成の立場から考察した。Laplace-Beltrami作用素にベクトル場を加えた作用素を考え、ベクトル場の条件で半群が一意的に決まる条件を与えた。
次に半群の凸集合の保存性に関する条件を整理した。Banach 空間の場合には生成作用素で条件を記述し、Hilbert空間の場合は Dirichlet 形式を用いて条件を与えた。
また対数 Sobolev 不等式の条件の下で不変測度への収束の速さを考察した。関連して双対超縮小性の条件を調べた。

研究成果の概要（英文）：We studied Markov processes by using the stochastic analysis. We are mainly interested in the behavior of the semigroup associated with a Markov process. First we considered diffusion processes on a Riemannian manifold. We give a generator as a sum of the Laplace-Beltrami operator and a vector field. We discussed the uniqueness of the semigroup associated with the generator. The condition was given in terms of the vector field.
Next we consider the conditions for which the semigroup reserves a convex set. We consider this problem in the framework of general Banach space. We give some necessary and sufficient conditions in terms of generator. In Hilbert space setting, we formulate this problem by using Dirichlet forms.
In addition, we considered the rate of convergence of the semigroup under the condition of logarithmic Sobolev inequality. We also discussed the dual ultracontractive property of the semigroup.

研究分野：確率論

科研費の分科・細目：確率解析

キーワード：マルコフ過程　エルゴード性　マルコフ半群　生成作用素のスペクトル　対数 Sobolev 不等式　超縮小性　確率解析

１．研究開始当初の背景

本研究の目的は、マルコフ過程を中心とした確率解析の理論を深化させることである。その基礎は伊藤理論にあると言えるが、1970年代にMalliavin 解析が出現し、無限次元的な観点が注目されるようになった。当初は有限次元の問題に、解析手段として無限次元の微積分を使うという観点で発展してきたが、次第に無限次元の構造自体を解析する方向に主眼が移ってきた。Malliavin 解析はWiener 空間の上の Gauss 測度を元にした微積分理論であったが、多様体上の道の空間や、Gibbs 測度を持つ R 上の連続関数の空間などへの一般化への道を開いた。

一方で、無限次元を扱うために Dirichlet 形式などの、関数解析的な枠組みも有効な手段である。Dirichlet 形式は抽象論としては空間の特別な構造を必要としないので、無限次元の解析に有効である。また対数 Sobolev 不等式やスペクトルギャップの問題、Hodge-Kodaira 作用素を用いた調和形式の理論など、Wiener 空間の結果を一般化することが一つの目標となってきた。その一方で無限次元の測度は、有限次元の確率過程から定まる場合が多く、無限次元の問題を扱うために、より一層有限次元の確率過程の解析も必要となった来た。半群の ultra-contractivity なども考える必要があり、特に一次元の場合には詳しい解析が可能なので、一次元の拡散過程をスペクトルギャップやエルゴード性の観点から深めていく必要も出てきた。R 上の連続関数の空間に定義される Gibbs 測度は数理物理的な観点からも興味を持たれている。

２．研究の目的

研究対象はマルコフ過程であり、確率解析の手法を十全に発展させることである。確率過程は、時間を無限大にしたときの漸近挙動に関連してエルゴード性を中心に解明していく。関連して半群の超縮小性、不変測度への収束、生成作用素のスペクトル、対数Sobolev 不等式、半群の凸性の保存、などの問題を、確率解析の手法を援用し、関数解析的に解明していく。

ここで用いられる Dirichlet 形式の理論は対称な場合が非常に詳しく調べられてきているが、非対称なものへの拡張も進んでおり、この点をさらに進めていく。また幾何学的な対象として微分作用素に働くHodge-Kodaira 作用素のスペクトルや、その生成する半群の性質を解明する。

３．研究の方法

ここでは特に次の三つの観点を融合させて研究を進める。

- 確率論的な観点
- 関数解析的な観点
- 幾何学的な観点

研究対象としては無限次元空間の確率過程、多様体上の確率過程、また一次元の拡散過程と対象の特殊性に応じて問題を扱い、手法として、Dirichlet 形式などの関数解析的手法を取り入れる。対数 Sobolev 不等式、スペクトルギャップ、エルゴード性、半群の超縮小性などを解明する。これら Dirichlet 形式の理論は対称な場合が非常に詳しく調べられてきているが、非対称なものへの拡張も進んでおり、この点をさらに進めていく。また L^2 理論から L^p 理論への拡張も自然な方向である。対数 Sobolev 不等式が L^p の枠組みでどのように変化していくかも解明していく。

４．研究成果

(1) Riemannian 多様体の上での拡散過程を半群の構成の立場から研究した。Riemannina 多様体の上で作用素 $\Delta+b$ を考え、対応する L^2 半群の存在と一意性の問題を考察した。ここで Δ は Laplace-Beltrami 作用素で、 b はベクトル場である。多様体には完備性を仮定し、さらに b の発散が下に有界であることと、増大度に関する条件をおいて対応する半群が一意的に存在することを示した。同様の問題を L^p でも考えることが出来る。この場合もほぼ同じ条件の下で半群の存在性が示せた。これで作用素が一意的に決まることが分かるが、さらにその domain についての特徴づけを行った。この場合重要となるのは、生成作用素 A と共変微分 ∇ との交換関係である。これを利用することにより、2 階微分可能性と b での可積分性の条件を分離することができ、作用素の定義域を表現することが出来た。

(2) Banach 空間における半群が凸集合を不変にするための条件の考察を行い、必要十分条件を求めた。これは抽象的な一般論として定式化したが、凸集合を変えると従来のさまざまな判定法を統一的に取り扱うことが可能になった。ここで取り上げたのは (a)正値性の保存 (b)マルコフ性 (c)超過関数 (d)不変集合、である。また空間も連続関数の空間、L^p 空間、などを統一的に取り扱った。Hilbert 空間の場合は Ouhabaz の Dirichlet 形式による定式化が知られているが、半群の縮小性を仮定した枠組みでの議論であった。縮小性の仮定を外すこともでき、適応範囲をさらに広げることが可能になった。

(3) マルコフ過程から定まる半群の時間無限大での漸近挙動について、おもに楠岡誠一郎氏と共同研究を行った。ここでは主に L^p 空間で p に応じてどのような変化があるかを調べた。そのためには、半群の超縮小性、あるいは超有界性が重要な働きをするので、それらをスペクトルの跳びとの関連で調べた。そして、超有界性がある場合には半群は平均に指数的に収束し、しかもその収束の速さは p に依存しないことを示した。さらに

指数の正値性が超縮小性と同値であることも示した。さらに生成作用素のスペクトルについても調べ、生成作用素が正規である場合には、スペクトル自体が p に依らないことも示した。

一方で、半群の収束の速さ、あるいはスペクトル自体が p に依存する場合の具体例を構成した。これは１次元の拡散過程で、固有関数は常微分方程式の解として実現されることを用いて、生成作用素のスペクトルを完全に決定した。これにより、半群の収束性に関しても p に依存することも明示的に分かり、 L^2 の場合が収束の速さは最も早いことも分かった。

(4) 非対称マルコフ半群の超縮小についての条件を考察した。対称な場合は、Nash の不等式、Sobolev の不等式などの同値条件が知られているが、非対称な場合も平行した議論が出来ることを示した。この場合は非対称なマルコフ半群に対し、対称な Dirichlet 形式が対応することを示すことが基本的である。但し、半群の超縮小性から Nash の不等式を示す場合は、付加的な条件が必要である。生成作用素が正規である場合はこの条件を確かめることが出来る。またこれらの応用として、マルコフ半群に不変測度が存在する場合を考察し、半群の時間無限大での不変測度への収束の速さを比べ、一般に対称なものより、非対称なものの方が速いことを示した。また生成作用素が正規作用素の場合は収束の速さは対称なものと変わらないことも示した。但しここでの収束は、基本解の一様収束の位相で考えている。そのために、L^2理論に超縮小性を組み合わせて議論した。

(5) マルコフ半群の双対超縮小性の問題を考察した。半群の超縮小性は L^1 から L^∞への有界性を意味するが、その双対概念として L^∞から L^1への有界性を考察した。双対概念で置き換えることにより、超縮小性の場合と平行した議論が可能である。Sobolev の不等式との同値性の部分は、超縮小性で現れない指数が丁度双対超縮小性に対応することが分かり、全体の見通しがよくなっている。

さらに応用として、一次元の拡散過程の場合を考察した。一次元の場合は自然尺度を取ると標準測度だけで決まるので、標準測度の境界での挙動によって分類が可能である。また時間が無限大での指数的な減少についても考察を行い、いくつかの十分条件を与えることが出来た。

(6) 一次元の拡散過程について、スペクトルと微分するという作用素との関係を論じた。生成作用素の係数がある種の関係を満たすと、固有関数の微分が再び別の作用素の固有関数となることが証明できる。この証明のための基本的なアイデアは、作用素の超対称性を用いることである。

さて、この枠組みに入る固有関数は、制約はあるが、Bessel 関数、Laguerre 多項式、Jacobi 多項式など、数理物理などでよくあらわれる関数を含んでいる。さらに微分による固有値の対応関係など、作用素の族として考えると全体の関係の見通しがよくなっている。またこれらの関数は超幾何関数 ${}_0F_1$, ${}_1F_1$, ${}_2F_1$ とそれぞれ関係があり、これらの超幾何関数を通して統一的な視点が得られることが分かった。特に昇降演算子を超対称性の枠組みで捕えることもでき、新しい視点を与えたと言える。

(7) 分担者の熊谷隆氏は、ある種の非対称マルコフ連鎖について、熱核のガウス型評価と放物型ハルナック不等式を証明した。この結果を用いて、非対称な一様楕円型 divergence form を、非対称なマルコフ連鎖で近似する方法を導きだした。また、杉田洋氏はコルモゴロフらの乱数理論およびブラムらの疑似乱数の理論を基にモンテカルロ法の新しい数学的定式化を与えた。その結果とくにモンテカルロ積分の場合は安全な疑似乱数の存在を示し、その実用化を行った。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 9 件）
① Ichiro Shigekawa, The dual ultracontractivity and its applications, to appear in Frontiers of Mathematics in China, 査読有

② Ichiro Shigekawa, Ultracontractivity for non-symmetric Markovian semigroups, to appear in Festschrift Masatoshi Fukushima, 査読有

③ Seiichiro Kusuoka and Ichiro Shigekawa, Exponential convergence of Markovian semigroups and their spectra on Lp-spaces, Kyoto Journal of Mathmatics, 54, No. 2, (2014) 367-399, 査読有

④ Ichiro Shigekawa, On spectra of 1-dimensional diffusion operators, Mathematical Quantum Field Theory and Related Topics, RIMS Kokyuroku No. 1859, (2013), 59-75, 査読無

⑤ Z.-Q. Chen, P. Kim, T. Kumagai, Discrete approximation of symmetric jump processes on metric measure spaces, Probab. Theory Related Fields, 155, (2013), 703-749. 査読有

⑥ 重川 一郎， マリアバン解析，“ 確率論ハンドブック ”pp. 307-342，丸善，2012，査

読無

⑦ Ichiro Shigekawa, Semigroups preserving a convex set in a Banach space, Kyoto Journal of Mathematics, 51 no. 3, (2011), 査読有

⑧ Ichiro Shigekawa, Non-symmetric diffusions on a Riemannian manifold, Probabilistic approach to geometry, pp. 437-461, Adv. Stud. Pure Math., 57, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2010, 査読有

⑨ Ichiro Shigekawa, Witten Laplacian on a lattice spin system, Astérisque No. 327 (2009), 115-129, 査読有

〔学会発表〕(計 11 件)

① Ichiro Shigekawa, Non-symmetric Diffusion on a Riemannian manifold, July 31, 2009, SPA 2009 Berlin, 33rd Conference on Stochastic Processes and Their Applications, (TU Berlin, Berlin, GERMANY)

② 重川 一郎, 非対称作用素のスペクトルについて, 2009 年 11 月 6 日(金)、 科研費シンポジウム「確率解析とその周辺」(於：東北大学理学部数理科学記念館 川井ホール)

③ 重川 一郎, 半群のマルコフ性とその周辺, 2011 年 8 月 5 日(金)、 仙台シンポジウム (於：東北大学大学院情報科学研究科 数学教室)

④ 重川 一郎, 非対称マルコフ半群の超縮小性とその応用 (slides PDF file 190Kb) 2011 年 8 月 5 日(金)、 仙台シンポジウム (於：東北大学大学院情報科学研究科 数学教室)

⑤ Ichiro Shigekawa, The spectrum of non-symmetric operators and Markov processes, September 9, 2011, "5th International Conference on Stochastic Analysis and Its Applications" (Bonn University, GERMANY)

⑥ Ichiro Shigekawa, Exponential Ccnvergence of Markov processes, July 20, 2012, The 8th Workshop on Markov processes and related topics, (At Beijing Normal University and Wuyishang, CHINA)

⑦ 重川 一郎, Non-symmetric diffusions on Riemannian manifold, 2012 年 10 月 21 日(日)、科研費シンポジウム「Geometry and Probability」(於：山形大学ゆうキャンパス・ステーション)

⑧ 重川 一郎, Exponential convergence of Markovian semigroups, 2012 年 10 月 25 日(木)、 科研費シンポジウム「確率解析とその周辺」(於：名古屋大学多元数理科学研究科)

⑨ 重川 一郎, On spectra of 1-dimensional diffusion operators, 2012 年 11 月 15 日(木)、「量子場の数理とその周辺」(於：京都大学数理解析研究所)

⑩ Ichiro Shigekawa, Spectra of 1-dimensoinal diffusion operators: some examples, September 9, 2013, Dirichlet Forms and Applications: German-Japanese Meeting on Stochastic Analysis, (University of Leipzig, GERMANY)

⑪ 重川 一郎, 1 次元拡散作用素の固有関数のいくつかの具体例について, 2013 年 9 月 21 日(土)、 科研費シンポジウム「確率解析とその周辺」(於：京都大学総合人間学部)

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕
○出願状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6．研究組織
(1)研究代表者
重川　一郎（SHIGEKAWA, Ichiro）
京都大学・大学院理学・教授
研究者番号：00127234

(2)研究分担者
熊谷　隆（KUMAGAI, Takashi）
京都大学・数理解析研究所・教授
研究者番号：90234509

杉田　洋（SUGITA, Hiroshi）
大阪大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：50192125

(3)連携研究者

会田　茂樹（AIDA, Shigeki）
東北大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：90222455

日野　正訓（HINO, Masanori）
大阪大学・大学院基礎工学研究科・教授
研究者番号：40303888

松本　裕行（MATSUMOTO, Hiroyuki）
青山学院大学・理工学部・教授
研究者番号：00190538